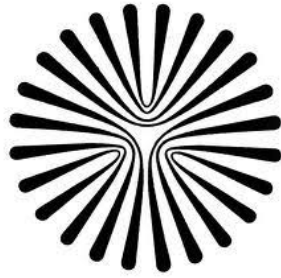


بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشگاه پیام نور

طرح پژوهشی

عنوان

حل عددی معادلات دیفرانسیل-انتگرالی همراه با شرط انتگرالی در

فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت

پژوهشگران

ابراهیم امینی

مجتبی فردی

اردیبهشت ۱۳۹۷

چکیده

در این پژوهش روش هسته‌ی بازتولید برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی همراه با شرط انتگرالی پیشنهاد شده است. مثالهای عددی ارائه شده تا دقت روش پیشنهادی را نشان دهد. نتایج به دست آمده کارایی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

کلمات کلیدی: شرط انتگرالی، فضای هسته‌ی بازتولید، آنالیز خطا، آنالیز همگرایی.

فهرست مطالب

۳	مقدمه
۵	۱ هسته‌ی بازتولید هیلبرت
۵	۱.۱ مقدمات فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت
۱۱	۱.۱.۱ فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$
۱۷	۲.۱.۱ زیرفضای بسته فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$
۲۲	۲ روش هسته‌ی بازتولید برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی غیرخطی
۲۳	۱.۲ فضای هسته‌ی بازتولید
۲۳	۱.۱.۲ فضای $W_\Psi^1[0, T]$
۲۳	۲.۱.۲ فضای ${}_cW_\Psi^m[0, 1]$
۲۵	۲.۲ جواب در فضای هسته بازتولید
۲۶	۱.۲.۲ محاسبه تقریب
۲۷	۳.۲ آنالیز همگرایی و خطا
۲۹	۱.۳.۲ آنالیز خطا
۳۱	۴.۲ مثال‌های عددی
۳۳	۵.۲ نتیجه‌گیری
۳۵	مراجع
۳۷	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی
۳۹	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

مقدمه

هسته‌ی بازتولید برای اولین بار در اوایل قرن بیستم در تحقیقات روی مسائل مقدار مرزی مورد استفاده قرار گرفت. در سال ۱۹۰۷، زارمبا^۱ اولین کسی بود که هسته‌ی متناظر با برخی از توابع خاص را معرفی و خاصیت بازتولید آنها را بیان نمود. اولین مرحله‌ی پیشرفت نظریه‌ی هسته‌ی بازتولید توسط مرسر^۲ انجام گرفت. او در سال‌های بین ۱۹۰۹ و ۱۹۱۱، در نظریه‌ی معادلات انتگرال، هسته‌های معین مثبتی را ارائه نمود که در خاصیت بازتولید صدق می‌کردند. پس از وقفه‌ای طولانی، ایده‌ی هسته‌ی بازتولید در تحقیقات سه ریاضیدان آلمانی به نام‌های زیگو^۳ (۱۹۲۱)، برگمن^۴ (۱۹۲۲) و باختر^۵ (۱۹۲۲) احیا شد. دومین مرحله‌ی پیشرفت نظریه‌ی هسته‌ی بازتولید توسط برگمن انجام شد. او هسته‌های بازتولید تک متغیره و چند متغیره برای برخی از توابع را معرفی کرد، که بعد از سی سال کار بر روی آنها به هسته‌های برگمن معروف شدند. مور^۶ در سال ۱۹۳۵، ارتباط بین هسته‌ها و ماتریس‌هی هرmitی معین مثبت را معرفی و کاربرد آنها در معادلات انتگرال را بررسی نمود. در سال‌های بین ۱۹۴۴ و ۱۹۵۰، نظریه‌ی هسته‌های بازتولید توسط آرونزان^۷ توسعه داده شد، به این ترتیب که روی هسته‌های بازتولید و کاربردشان روی معادلات دیفرانسیل جزئی مطالعاتی انجام داد. آرونزان در [۱]، نظریه کلی هسته‌های بازتولید را ارائه نمود. برگمن و شیفر^۸ با توسعه ایده اولیه زارمبا در حل مسائل مقدار مرزی، هسته‌های بازتولید را به عنوان ابزاری قدرتمند در حل مسائل مقدار مرزی بیضوی معرفی کردند.

از سال ۱۹۸۰ به واسطه تلاش‌های کوی^۹ و همکاران توابع هسته‌ی بازتولید به شکل بسیار ساده‌ی چندجمله‌ای معرفی شدند. آنها توانستند روی روش‌هایی مبتنی بر فضای هسته‌ی بازتولید کار کنند. در سال‌های اخیر، محققان روش‌های مذکور را برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی، معادلات دیفرانسیل جزئی و معادلات انتگرالی [۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹] بکار برده‌اند.

1. Zarembo
2. Mercer
3. Szego
4. Bergman
5. Bochner
6. Moore
7. Aronszajn
8. Schiffer
9. Cui

روش‌های مبتنی بر هسته‌ی بازتولید بر پایه نظریه بهترین تقریب در فضای هیلبرت و استفاده از بسط فوریه می‌باشد. در روش‌های مذکور، ابتدا فضای هسته‌ی بازتولید با توجه به صورت کلی مسئله و شرایط حاکم بر آن تعریف می‌شود. سپس هسته‌ی بازتولید به صورت تابعی چند ضابطه‌ای به دست می‌آید. اکنون یا توابع پایه متعامد یکه با استفاده از فرآیند متعامدسازی گرام-اشمیت تولید می‌شود و به عنوان توابع پایه در تقریب جواب مورد استفاده قرار می‌گیرد و یا فرآیند متعامدسازی گرام-اشمیت حذف شده و به جای آن حل دستگاه معادلات نرمال جایگزین می‌شود. در این پژوهش یک روش عددی مبتنی بر تئوری هسته‌ی بازتولید برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی همراه با شرط انتگرالی بررسی می‌شود. در واقع با بکار گرفتن هسته‌ی بازتولید جواب تحلیلی به صورت یک سری نامتناهی نمایش داده می‌شود. با استفاده از یک روش تکراری، جواب تقریبی نظیر سری مذکور بدست آورده می‌شود و یک آنالیز خطا و همگرایی ارائه می‌گردد. در پایان خطای روش توسط نرم بینهایت مورد بررسی قرار گرفته که نتایج بدست آمده کارایی روش را نشان می‌دهد.

فصل ۱

هسته‌ی بازتولید هیلبرت

در این فصل، بعد از ارائه‌ی مقدمات نظریه فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت [۲، ۵، ۶، ۷، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶]، تمرکز خود را روی ساختن چندین نمونه از فضاهای هسته‌ی بازتولید معطوف خواهیم کرد. در این فصل به تعریف دو نمونه از فضاهای هسته‌ی بازتولید که مورد استفاده فصل‌های بعدی رساله‌اند، می‌پردازیم. ابتدا فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}^m[a, b]$ و زیرفضاهای بسته آن را تعریف خواهیم نمود. در پایان این فصل، فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}_p^{(m,n)}(\Omega)$ و نحوه ساختن هسته‌ی بازتولید این فضا را مورد بحث قرار می‌دهیم.

۱.۱ مقدمات فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنید \mathcal{H} فضای هیلبرت متشکل از توابع $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، همراه با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ باشد، در این صورت تابع $K : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ هسته‌ی بازتولید برای \mathcal{H} است هرگاه

۱. به ازای هر $y \in E$ ، داشته باشیم:

$$K_y(\cdot) = K(\cdot, y) \in \mathcal{H},$$

۲. به ازای هر $y \in E$ و $f \in \mathcal{H}$ ، داشته باشیم:

$$f(y) = \langle f, K_y \rangle_{\mathcal{H}}.$$

در تعریف مذکور به رابطه دوم خاصیت بازتولیدی گوئیم.

تعریف ۲.۱.۱. فضای هیلبرت \mathcal{H} که دارای هسته‌ی بازتولید باشد، به فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت معروف است.

قضیه ۱.۱.۱. اگر K هسته‌ی بازتولید فضای هیلبرت \mathcal{H} باشد، آنگاه به ازای هر $x \in E$ داریم:

$$K_x(x) \geq 0.$$

برهان ۱. بنابر خاصیت بازتولید داریم:

$$K_x(x) = \langle K_x, K_x \rangle_{\mathcal{H}} = \|K_x\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0,$$

و بنابراین برهان تمام است.

قضیه ۲.۱.۱. فرض کنید \mathcal{H} یک فضای هسته‌ی بازتولید باشد، در این صورت هسته‌ی بازتولید \mathcal{H} متقارن است.

برهان ۲. فرض کنید $K_y(x)$ هسته‌ی بازتولید متناظر با فضای هسته‌ی بازتولید \mathcal{H} باشد، در این صورت داریم:

$$K_y(x) = \langle K_y, K_x \rangle_{\mathcal{H}} = \langle K_x, K_y \rangle_{\mathcal{H}} = K_x(y),$$

و بنابراین برهان تمام است.

مثال ۱.۱.۱. همان طوری که در فصل قبل بیان شد فضای برداری L^2 یک فضای هیلبرت است. تابع دلتای دیراک خاصیت بازتولید دارد، ولی متعلق به فضای L^2 نیست، بنابراین فضای هیلبرت L^2 فضای هسته‌ی بازتولید نیست.

مثال ۲.۱.۱. هر فضای هیلبرت متشکل از توابع حقیقی روی مجموعه‌ی غیرتهی E با بعد متناهی n یک فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت است. زیرا چنانچه $\{e_i(x)\}_{i=1}^n$ پایه متعامد یکه این فضا باشد، در این صورت $K_y(x) = \sum_{i=1}^n e_i(y)e_i(x)$ هسته‌ی بازتولید \mathcal{H} است. در واقع برای هر $f \in \mathcal{H}$ داریم:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i e_i(x).$$

و در نتیجه داریم:

$$\langle f, K_y \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \sum_{i=1}^n a_i e_i, \sum_{j=1}^n e_j(y) e_j \right\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^n a_i e_i(y) = f(y).$$

قضیه ۳.۱.۱. اگر فضای هیلبرت \mathcal{H} تعریف شده بر روی مجموعه E دارای هسته‌ی بازتولید باشد، آنگاه هسته‌ی بازتولید آن یکتاست.

برهان ۳. فرض کنید \mathcal{H} دارای دو هسته‌ی بازتولید K_y و R_y باشد، در این صورت برای هر $y \in E$ داریم:

$$\begin{aligned} \|K_y - R_y\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle K_y - R_y, K_y - R_y \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle K_y - R_y, K_y \rangle_{\mathcal{H}} - \langle K_y - R_y, R_y \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= K_y(y) - R_y(y) - (K_y(y) - R_y(y)) = 0. \end{aligned}$$

و لذا داریم:

$$K_y(x) = R_y(x), \quad \forall x, y \in E.$$

بنابراین برهان تمام است.

قضیه ۴.۱.۱. فضای هیلبرت \mathcal{H} متشکل از توابع تعریف شده روی مجموعه‌ی E هسته‌ی بازتولید دارد اگر و فقط اگر برای هر $y \in E$ تابع خطی زیر کران دار (یا پیوسته) باشد:

$$\begin{aligned} I : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ I(f) &= f(y), \quad \forall f \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

برهان ۴. فرض کنید K_y هسته‌ی بازتولید \mathcal{H} باشد، در این صورت با توجه به خاصیت بازتولید و نامساوی کوشی-شوارتز داریم:

$$\|I(f)\| = |f(y)| = |\langle f, K_y \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \|K_y\|_{\mathcal{H}} = (K_y(y))^{\frac{1}{2}} \|f\|_{\mathcal{H}},$$

بنابراین تابع خطی I برای هر $y \in E$ کران دار است.

حال فرض کنید تابع خطی I برای هر $f \in \mathcal{H}$ کران دار باشد، در این صورت با استفاده از قضیه نمایش ریس عضو یکتای $K_y \in \mathcal{H}$ موجود است به طوری که داریم:

$$I(f) = f(y) = \langle f, K_y \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

بنابراین برهان تمام است.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنید E مجموعه‌ای دلخواه باشد، در این صورت هسته‌ی متقارن $K : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ را معین مثبت گوییم، هرگاه برای هر مجموعه‌ی متناهی از نقاط $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq E$ و اعداد حقیقی

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ داشته باشیم:

$$\sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j K(x_i, x_j) \geq 0.$$

قضیه ۵.۱.۱. هسته‌ی بازتولید هر فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت معین مثبت است.

برهان ۵. فرض کنید K هسته‌ی بازتولید فضای هسته بازتولید باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \alpha_i \alpha_j K(x_i, x_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle K_{x_i}, K_{x_j} \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i K_{x_i}, \sum_{j=1}^n \alpha_j K_{x_j} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i K_{x_i} \right\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

بنابراین برهان تمام است.

با توجه به یکتایی هسته‌ی بازتولید می‌توان نتیجه گرفت که قضیه زیر عکس قضیه ۳.۱.۱ است.

قضیه ۶.۱.۱. فرض کنید تابع K بر روی مجموعه‌ی E معین مثبت باشد، در این صورت متناظر با تابع K یک فضای هسته‌ی بازتولید یکتای \mathcal{H} موجود است.

برهان ۶. فضای \mathcal{H} را فضای متشکل از توابعی مانند f بر روی E تعریف می‌کنیم که در آن مجموعه متناهی از نقاط x_1, \dots, x_n در E و اعداد $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ موجود هستند به طوری که داشته باشیم:

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i K(\cdot, x_i).$$

ضرب داخلی در \mathcal{H} را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i K(\cdot, x_i), \sum_{j=1}^m \beta_j K(\cdot, y_j) \right\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j K(y_j, x_i). \quad (1.1)$$

تابع K یک هسته‌ی بازتولید برای فضای \mathcal{H} است زیرا:

$$\begin{aligned} \langle f, K_y \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle f, K(\cdot, y) \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i K(\cdot, x_i), K(\cdot, y) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i K(y, x_i) = f(y), \quad \forall y \in E. \end{aligned}$$

اکنون ثابت می‌کنیم رابطه (۱.۱) در ویژگی‌های ضرب داخلی صدق می‌کند. خطی بودن (۱.۱) نسبت به مؤلفه‌ی اول به وضوح برقرار است. از طرفی با توجه به تقارن تابع K داریم:

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \beta_j K(y_j, x_i) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \beta_j \alpha_i K(x_i, y_j) = \langle g, f \rangle_{\mathcal{H}_0}.$$

همچنین با توجه به معین مثبت بودن تابع K داریم:

$$\langle f, f \rangle_{\mathcal{H}_0} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j K(x_i, x_j) \geq 0.$$

با توجه به رابطه‌ی $\langle f, f \rangle_{\mathcal{H}_0} = 0$ و به دنبال آن $\|f\|_{\mathcal{H}_0} = 0$ نتیجه می‌گیریم:

$$\forall y \in E, |f(y)| \leq \|f\|_{\mathcal{H}_0} \|K(\cdot, y)\|_{\mathcal{H}_0} = \|f\|_{\mathcal{H}_0} (K(y, y))^{\frac{1}{2}} \implies f = 0.$$

بنابراین \mathcal{H}_0 با ضرب داخلی $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}_0}$ یک فضای ضرب داخلی است. فضای \mathcal{H} ، را کامل‌شده‌ی فضای \mathcal{H}_0 به فضای هیلبرت در نظر می‌گیریم. اکنون ثابت می‌کنیم K هسته‌ی بازتولید فضای \mathcal{H} است. حال فرض کنید که برای هر $f \in \mathcal{H}$ داشته باشیم:

$$0 = \langle f, K_y \rangle_{\mathcal{H}} = f(y), \forall y \in E,$$

در این صورت تنها تابع متعلق به \mathcal{H} که بر همه اعضای مجموعه‌ی $\{K_y : y \in E\}$ عمود است تابع $f = 0$ است. لذا مجموعه‌ی $\{K_y : y \in E\}$ ، مجموعه‌ای کامل در \mathcal{H} است. به همین دلیل برای هر $f \in \mathcal{H}$ دنباله‌ی کوشی $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در زیرفضای تولیدشده توسط اعضای مجموعه $\{K_y : y \in E\}$ که همان \mathcal{H}_0 است، وجود دارد به طوری که داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{H}_0} = 0.$$

با استفاده از خاصیت بازتولید برای هر $y \in E$ داریم:

$$\begin{aligned} |f_m(y) - f_n(y)| &= |\langle f_m - f_n, K_y \rangle_{\mathcal{H}_0}| \\ &\leq \|f_m - f_n\|_{\mathcal{H}_0} \|K_y\|_{\mathcal{H}_0} \\ &= \|f_m - f_n\|_{\mathcal{H}_0} (K_y(y))^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

و بنابراین برای هر $y \in E$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = f(y).$$

لذا با توجه به رابطه‌ی زیر K هسته‌ی بازتولید برای \mathcal{H} است.

$$\begin{aligned} \langle f, K_y \rangle_{\mathcal{H}} &= \langle \lim_{n \rightarrow \infty} f_n, K_y \rangle_{\mathcal{H}}. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, K_y \rangle_{\mathcal{H}}. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = f(y). \end{aligned}$$

اکنون یکتایی فضای هیلبرت متناظر با هسته‌ی بازتولید K را اثبات می‌کنیم. فرض کنید \mathcal{H}_1 فضای هیلبرت دیگری متناظر با هسته‌ی بازتولید K باشد. در این صورت اثبات می‌کنیم که $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$.

اگر برای هر $f \in \mathcal{H}_1$ داشته باشیم:

$$\circ = \langle f, K_y \rangle_{\mathcal{H}_1} = f(y), \forall y \in E,$$

آن‌گاه تنها تابع متعلق به \mathcal{H}_1 که بر همه اعضای مجموعه $\{K_y : y \in E\}$ عمود است تابع $f = \circ$ است. لذا مجموعه $\{K_y : y \in E\}$ ، مجموعه‌ای کامل در \mathcal{H}_1 است. به همین دلیل برای هر $f \in \mathcal{H}_1$ دنباله‌ی کوشی $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در زیرفضای تولیدشده توسط اعضای مجموعه $\{K_y : y \in E\}$ که همان \mathcal{H}_0 است، وجود دارد به طوری که داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{H}_0} = 0.$$

حال با توجه به اینکه $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}$ داریم:

$$f \in \mathcal{H},$$

و نتیجه می‌شود:

$$\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}.$$

با توجه به تعریف هسته‌ی بازتولید، برای هر $y \in E$ داریم:

$$K_y \in \mathcal{H}_1,$$

و در نتیجه داریم:

$$\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_1, \quad (2.1)$$

مجموعه $\{K_y : y \in E\}$ ، مجموعه‌ای کامل در \mathcal{H} است. به همین دلیل برای هر $f \in \mathcal{H}$ دنباله‌ی کوشی $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ در زیرفضای تولیدشده توسط اعضای مجموعه $\{K_y : y \in E\}$ که همان \mathcal{H}_0 است، وجود دارد به طوری که داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{H}_0} = 0.$$

حال با توجه به اینکه $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_1$ داریم:

$$\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_1.$$

لذا طبق آنچه بیان شد، داریم:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1.$$

بنابراین برهان تمام است.

نکته ۱.۱.۱. فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت \mathcal{H} ساخته شده در قضیه‌ی ۶.۱.۱ به فضای بومی معروف است که با نماد \mathcal{N}_k نمایش داده می شود.

در ادامه به تعریف برخی از فضاها‌ی مهم هسته‌ی بازتولید هیلبرت و همچنین نحوه‌ی ساختن هسته‌ی بازتولید متناظر با آنها می پردازیم.

۱.۱.۱ فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$

تعریف ۴.۱.۱. فضای $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ را فضای متشکل از توابعی به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\mathcal{H}_\Psi^m[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f^{(m-1)} \in \mathcal{AC}[a, b], f^{(m)} \in L^\Psi[a, b]\}.$$

ضرب داخلی و نرم روی فضای $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{H}_\Psi^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x)g^{(m)}(x)dx, \quad \forall f, g \in \mathcal{H}_\Psi^m[a, b], \quad (3.1)$$

$$\|f\|_{\mathcal{H}_\Psi^m} = \langle f, f \rangle_{\mathcal{H}_\Psi^m}^{\frac{1}{2}} \quad \forall f \in \mathcal{H}_\Psi^m[a, b].$$

قضیه ۷.۱.۱. فضای توابع $\mathcal{H}_p^m[a, b]$ یک فضای هیلبرت است.

برهان ۷. واضح است که فضای $\mathcal{H}_p^m[a, b]$ یک فضای ضرب داخلی است. بنابراین کافی است کامل بودن آن را بررسی کنیم.

فرض کنید دنباله‌ای کوشی در فضای $\mathcal{H}_p^m[a, b]$ باشد، یعنی:

$$\|f_{n+p} - f_n\|_{\mathcal{H}_p^m}^2 = \sum_{i=0}^{m-1} (f_{n+p}^{(i)}(a) - f_n^{(i)}(a))^2 + \int_a^b (f_{n+p}^{(m)}(x) - f_n^{(m)}(x))^2 dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

در این صورت داریم:

$$f_{n+p}^{(i)}(a) - f_n^{(i)}(a) \rightarrow 0, \quad i = 0, 1, \dots, m-1, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\int_a^b (f_{n+p}^{(m)}(x) - f_n^{(m)}(x))^2 dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

بنابراین برای $i = 0, 1, \dots, m-1$ دنباله‌ی $\{f_n^{(i)}(a)\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در \mathbb{R} و دنباله‌ی $\{f_n^{(m)}\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در فضای $L^2[a, b]$ است. بنابراین با توجه به کامل بودن فضاهای \mathbb{R} و $L^2[a, b]$ ، اعداد حقیقی λ_i برای $i = 0, 1, \dots, m-1$ و تابع یکتای $h \in L^2[a, b]$ موجود هستند، به طوری که داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(i)}(a) = \lambda_i, \quad i = 0, 1, \dots, m-1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f_n^{(m)}(x) - h(x))^2 dx = 0.$$

اکنون قرار می‌دهیم:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\lambda_k}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \int_a^{t_1} \cdots \int_a^{t_{m-1}} h(\tau) d\tau dt_{m-1} \cdots dt_1,$$

و نشان می‌دهیم g به فضای $\mathcal{H}_p^m[a, b]$ تعلق دارد.

با توجه به این که $h \in L^2[a, b]$ ، لذا داریم:

$$g^{(m-1)}(x) = \lambda_{m-1} + \int_a^x h(\tau) d\tau \in \mathcal{AC}[a, b],$$

همچنین داریم:

$$g^{(m)}(x) = h(x) \in L^2[a, b],$$

و بنابراین $g \in \mathcal{H}_V^m[a, b]$ از طرفی می‌دانیم:

$$\begin{aligned} \|f_n - g\|_{\mathcal{H}_V^m}^2 &= \sum_{i=1}^{m-1} (f_n^{(i)}(a) - g^{(i)}(a))^2 + \int_a^b (f_n^{(m)}(x) - g^{(m)}(x))^2 dx \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} (f_n^{(i)}(a) - \lambda_i)^2 + \int_a^b (f_n^{(m)}(x) - h(x))^2 dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

که نشان می‌دهد فضای $\mathcal{H}_V^m[a, b]$ یک فضای هیلبرت است و بنابراین برهان تمام است.

قضیه ۸.۱.۱. فضای توابع $\mathcal{H}_V^m[a, b]$ ، یک فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت است.

برهان ۸. با استفاده از قضیه ۴.۱.۱ کافی است اثبات کنیم که برای هر $x \in E$ ، تابع خطی زیر کران‌دار است.

$$I : \mathcal{H}_V^m[a, b] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$I(f) = f(x), \quad \forall f \in \mathcal{H}_V^m[a, b].$$

با استفاده از رابطه‌ی $f^{(m-1)}(x) = f^{(m-1)}(a) + \int_a^x f^{(m)}(t) dt$ داریم:

$$|f^{(m-1)}(x)| \leq |f^{(m-1)}(a)| + \int_a^b |f^{(m)}(x)| dx.$$

از طرفی بنابر نامساوی هولدر و با قرارداد $M_0 = \sqrt{b-a}$ داریم:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f^{(m)}(x)| dx &\leq \left((b-a) \int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = M_0 \left(\int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M_0 \left(\sum_{i=0}^{m-1} (f^{(i)}(a))^2 + \int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = M_0 \|f\|_{\mathcal{H}_V^m}. \end{aligned}$$

همچنین برای $i = 0, \dots, m-1$ داریم:

$$|f^{(i)}(a)| \leq \left(\sum_{i=0}^{m-1} (f^{(i)}(a))^2 + \int_a^b |f^{(m)}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \|f\|_{\mathcal{H}_V^m}. \quad (4.1)$$

لذا با استفاده از رابطه‌ی (۴.۱) نتیجه می‌گیریم:

$$|f^{(m-1)}(x)| \leq M_1 \|f\|_{\mathcal{H}_1^m}, \quad M_1 = M_0 + 1. \quad (5.1)$$

از طرفی با توجه به رابطه‌ی $|f^{(m-2)}(x)| \leq |f^{(m-2)}(a)| + \int_a^b |f^{(m-1)}(x)| dx$ و روابط (۴.۱) و (۵.۱) داریم:

$$|f^{(m-2)}(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{H}_1^m} + (b-a)M_1 \|f\|_{\mathcal{H}_1^m} = M_2 \|f\|_{\mathcal{H}_1^m}, \quad M_2 = 1 + (b-a)M_1.$$

با تکرار این مراحل داریم:

$$|I(f)| = |f(x)| \leq M_m \|f\|_{\mathcal{H}_1^m},$$

و بنابراین برهان تمام است.

تابع هسته‌ی بازتولید

حال به ساختن هسته‌ی بازتولید فضای $\mathcal{H}_1^m[a, b]$ می‌پردازیم. هدف ما یافتن K_y^m است، به طوری که برای هر $y \in [a, b]$ و $f \in \mathcal{H}_1^m[a, b]$ داشته باشیم:

$$\langle f, K_y^m \rangle_{\mathcal{H}_1^m} = f(y).$$

با توجه به رابطه‌ی (۳.۱) داریم:

$$\langle f, K_y^m \rangle_{\mathcal{H}_1^m} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a) \frac{\partial^i K_y^m(a)}{\partial x^i} + \int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m K_y^m(x)}{\partial x^m} dx.$$

با استفاده‌ی مکرر از انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\begin{aligned} \int_a^b f^{(m)}(x) \frac{\partial^m K_y^m(x)}{\partial x^m} dx &= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(m-i-1)}(x) \frac{\partial^{m+i} K_y^m(x)}{\partial x^{m+i}} \Big|_a^b \\ &+ (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^m K_y^m(x)}{\partial x^m} dx \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(x) \frac{\partial^{m-i-1} K_y^m(x)}{\partial x^{m-i-1}} \Big|_a^b \\ &+ (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^m K_y^m(x)}{\partial x^m} dx. \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$f(y) = \langle f, K_y^m \rangle_{\mathcal{H}_\Psi^m} = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i f^{(i)}(a) \left(\frac{\partial^i K_y^m(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} K_y^m(a)}{\partial x^{m-i-1}} \right) + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^{m-i-1} f^{(i)}(b) \frac{\partial^{m-i-1} K_y^m(b)}{\partial x^{m-i-1}} + (-1)^m \int_a^b f(x) \frac{\partial^m K_y^m(x)}{\partial x^m} dx. \quad (6.1)$$

در صورتی که روابط زیر را داشته باشیم، آن‌گاه تساوی (۶.۱) برقرار است:

$$\begin{cases} (-1)^m \frac{\partial^m K_y^m(x)}{\partial x^m} = \delta(x-y), \\ \frac{\partial^i K_y^m(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} K_y^m(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, \dots, m-1, \\ \frac{\partial^{m-i-1} K_y^m(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, \dots, m-1. \end{cases} \quad (7.1)$$

حال با توجه به رابطه (۷.۱) و ویژگی‌های تابع دلتای دیراک، مسئله مقدار مرزی زیر به دست می‌آید:

$$(-1)^m \frac{\partial^m K_y^m(x)}{\partial x^m} = 0, \quad y \neq x, \quad (8.1)$$

$$\frac{\partial^i K_y^m(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} K_y^m(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial^{m-i-1} K_y^m(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 0, \dots, m-1, \quad (10.1)$$

$$\left. \frac{\partial^i K_y^m(x)}{\partial x^i} \right|_{x=y^+} = \left. \frac{\partial^i K_y^m(x)}{\partial x^i} \right|_{x=y^-}, \quad i = 0, \dots, m-2, \quad (11.1)$$

$$(-1)^m \left(\left. \frac{\partial^{m-1} K_y^m(x)}{\partial x^{m-1}} \right|_{x=y^+} - \left. \frac{\partial^{m-1} K_y^m(x)}{\partial x^{m-1}} \right|_{x=y^-} \right) = 1, \quad (12.1)$$

که با حل آن تابعی صریح برای هسته‌ی بازتولید $K_y^m(x)$ نتیجه می‌شود. از آنجایی که رابطه‌ی (۸.۱) دارای معادله مشخصه‌ی $\lambda^{2m} = 0$ با مقدار مشخصه‌ی $\lambda = 0$ با تکرار $2m$ است، شکل کلی $K_y^m(x)$ به صورت زیر است:

$$K_y^m(x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{2m} c_i(y) x^{i-1}, & x \leq y, \\ \sum_{i=1}^{2m} d_i(y) x^{i-1}, & x > y, \end{cases}$$

که دارای $2m$ مجهول است که پس از حل معادلات (۹.۱)، (۱۰.۱)، (۱۱.۱) و (۱۲.۱) به دست می‌آیند.

برخی خواص هسته‌ی بازتولید

قضیه ۹.۱.۱. فرض کنید K_y^m هسته‌ی بازتولید فضای هسته‌ی بازتولید $\mathcal{H}^m[a, b]$ باشد، در این صورت عبارت $\frac{\partial^{i+j} K_y^m(x)}{\partial x^i \partial y^j}$ ، $i + j = 2m - 1$ به عنوان تابعی از y یا x متعلق به فضای $L^2[a, b]$ است.

برهان ۹. با توجه به رابطه‌ی (۷.۱)، برای هر $x, y \in [a, b]$ داریم:

$$\frac{\partial^{2m} K_y^m(x)}{\partial x^{2m}} = (-1)^m \delta(x - y).$$

لذا داریم:

$$\frac{\partial^{2m-1} K_y^m(x)}{\partial x^{2m-1}} - \frac{\partial^{2m-1} K_y^m(x)}{\partial x^{2m-1}} \Big|_{x=a} = (-1)^m H(x - y), \quad (13.1)$$

که در آن

$$H(x - y) = \begin{cases} 0, & x \leq y, \\ 1, & x > y, \end{cases}$$

اکنون با توجه به تساوی (۱۳.۱) داریم:

$$\frac{\partial^{2m} K_y^m(x)}{\partial x^{2m-1} \partial y} - \frac{\partial^{2m} K_y^m(x)}{\partial x^{2m-1} \partial y} \Big|_{x=a} = (-1)^{m-1} \delta(x - y).$$

لذا رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\frac{\partial^{2m-1} K_y^m(x)}{\partial x^{2m-2} \partial y} - \frac{\partial^{2m-1} K_y^m(x)}{\partial x^{2m-2} \partial y} \Big|_{x=a} - (x - a) \frac{\partial^{2m} K_y^m(x)}{\partial x^{2m-1} \partial y} \Big|_{x=a} = (-1)^{m-1} H(x - y).$$

لذا داریم:

$$\frac{\partial^{2m-1} K_y^m(x)}{\partial x^{2m-2} \partial y} \in L^2[a, b].$$

با توجه به آنچه بیان شد، برای سایر مراتب مشتق داریم:

$$\frac{\partial^{i+j} K_y^m(x)}{\partial x^i \partial y^j} \in L^2[a, b], \quad i + j = 2m - 1.$$

بنابراین برهان تمام است.

نتیجه ۱.۱.۱. عبارت $\frac{\partial^{i+j} K_y^m(x)}{\partial x^i \partial y^j}$ ، $0 \leq i + j \leq 2m - 2$ به عنوان تابعی از y یا x متعلق به فضای $\mathcal{AC}[a, b]$ است.

برهان ۱۰. با استناد به برهان قضیه‌ی ۹.۱.۱، برهان واضح است.

قضیه ۱۰.۱.۱. فرض کنید K_y^m هسته‌ی بازتولید فضای $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ باشد، در این صورت عبارت

$$\frac{\partial^{i+j} K_y^m(x)}{\partial x^i \partial y^j}, \quad i + j = m - 1,$$

به عنوان تابعی از y یا x ، متعلق به فضای $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ است.

برهان ۱۱. با توجه به تعریف فضای $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ و با استناد به قضیه‌ی ۹.۱.۱ و نتیجه‌ی ۱.۱.۱، برهان واضح است.

قضیه ۱۱.۱.۱. فرض کنید دنباله‌ای در فضای $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ و همگرا به تابع f نسبت به نرم $\|\cdot\|_{\mathcal{H}_\Psi^m}$ باشد، در این صورت دنباله‌ی $\{f_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty$ برای $0 \leq k \leq m - 1$ ، به طور یکنواخت به $f^{(k)}$ همگراست.

برهان ۱۲. فرض کنید K_y^m هسته‌ی بازتولید فضای $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ باشد، در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} f_n(y) - f(y) &= \langle f_n - f, K_y^m \rangle_{\mathcal{H}_\Psi^m} \\ f_n^{(j)}(y) - f^{(j)}(y) &= (f_n(y) - f(y))^{(j)} \\ &= \frac{d^j}{dy^j} (\langle f_n - f, K_y^m \rangle_{\mathcal{H}_\Psi^m}) = \langle f_n - f, \frac{\partial^j K_y^m}{\partial y^j} \rangle_{\mathcal{H}_\Psi^m}. \end{aligned}$$

با استفاده از نامساوی کوشی-شوارتز و با توجه به قضیه‌ی ۱۰.۱.۱ داریم:

$$|f_n^{(j)}(y) - f^{(j)}(y)| \leq \|f_n - f\|_{\mathcal{H}_\Psi^m} \left\| \frac{\partial^j K_y^m}{\partial y^j} \right\|_{\mathcal{H}_\Psi^m}.$$

حال با توجه به پیوستگی $\left\| \frac{\partial^j K_y^m}{\partial y^j} \right\|_{\mathcal{H}_\Psi^m}$ نسبت به متغیر y در بازه $[a, b]$ داریم:

$$|f_n^{(j)}(y) - f^{(j)}(y)| \leq M_j \|f_n - f\|_{\mathcal{H}_\Psi^m},$$

که در آن $M_j > 0$ و بنابراین برهان تمام است.

۲.۱.۱ زیرفضای بسته فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$

با اعمال شرایطی اولیه یا مرزی همگن بر روی اعضای فضای $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ ، زیر فضای بسته‌ای از آن به دست می‌آید. از آنجایی که نرم و ضرب داخلی این زیرفضاها دقیقاً مشابه با فضای $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ تعریف می‌شوند. لذا این زیرفضا نیز فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت است.

فضای هسته‌ی بازتولید با اعمال شرایط موضعی

اکنون فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت ${}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ را با اعمال شرایط مرزی دیریکله همگن بر روی اعضای فضای $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ به دست آورده و به یافتن هسته‌ی بازتولید آن می‌پردازیم. سایر شرایط مرزی همگن نیز به طور مشابه قابل اعمال هستند.

تعریف ۵.۱.۱. فضای ${}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ را فضای متشکل از توابعی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$${}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b] = \{f \in \mathcal{H}_\Psi^m[a, b] \mid f(a) = f(b) = 0\}.$$

ضرب داخلی و نرم روی فضای ${}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\langle f, g \rangle_{{}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]} = \sum_{i=0}^{m-1} f^{(i)}(a)g^{(i)}(a) + \int_a^b f^{(m)}(x)g^{(m)}(x)dx, \quad f, g \in {}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b],$$

$$\|f\|_{{}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]} = (\langle f, f \rangle_{{}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]})^{\frac{1}{2}} \quad f \in {}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b].$$

نکته ۲.۱.۱. نماد c در تعریف فضای ${}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ حرف ابتدایی کلمه *closed* است.

برای یافتن هسته‌ی بازتولید فضای ${}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ ، با توجه به رابطه‌ی (۶.۱)، کافی است مسئله مقدار مرزی (۸.۱)،

(۹.۱)، (۱۰.۱)، (۱۱.۱) و (۱۲.۱) را به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$\left\{ \begin{array}{l} (-1)^m \frac{\partial^m K_y^m(x)}{\partial x^m} = 0, \quad y \neq x, \\ \frac{\partial^i K_y^m(a)}{\partial x^i} - (-1)^{m-i-1} \frac{\partial^{m-i-1} K_y^m(a)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \\ \frac{\partial^{m-i-1} K_y^m(b)}{\partial x^{m-i-1}} = 0, \quad i = 1, \dots, m-1, \\ K_y^m(a) = 0, \\ K_y^m(b) = 0, \\ \frac{\partial^i K_y^m(x)}{\partial x^i} \Big|_{x=y^+} = \frac{\partial^i K_y^m(x)}{\partial x^i} \Big|_{x=y^-}, \quad i = 0, \dots, m-2, \\ (-1)^m \left(\frac{\partial^{m-1} K_y^m(x)}{\partial x^{m-1}} \Big|_{x=y^+} - \frac{\partial^{m-1} K_y^m(x)}{\partial x^{m-1}} \Big|_{x=y^-} \right) = 1. \end{array} \right.$$

قضیه ۱۲.۱.۱. فضای ${}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ ، زیرفضای بسته‌ای از فضای $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ است.

برهان ۱۳. فرض کنید برای دنباله‌ی $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subseteq {}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ و تابع $f \in \mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{H}_\Psi^m} = 0,$$

در این صورت با استفاده از قضیه‌ی ۱۱.۱.۱ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a) = f(a),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(b) = f(b).$$

اکنون با توجه به اینکه $f_n \in {}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ ، لذا می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$f_n(a) = f_n(b) = \circ,$$

و در نتیجه داریم:

$$f(a) = f(b) = \circ.$$

بنابراین $f \in {}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ و این نشان می‌دهد فضای ${}_c\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ زیرفضای بسته‌ای از فضای $\mathcal{H}_\Psi^m[a, b]$ است و بنابراین برهان تمام است.

فضای هسته‌ی بازتولید با شرایط غیرموضعی

از جمله شرایط مرزی حاکم بر معادلات دیفرانسیل می‌توان به شرایط مرزی غیرموضعی اشاره کرد، که در آن مقدار تابع بر روی مرز یا قسمتی از مرز به مقادیر درون دامنه یا سایر قسمت‌های مرز مربوط می‌شود. به عنوان مثال فضای هسته‌ی بازتولید ${}_c\mathcal{H}_\Psi^3[0, 1]$ را با اعمال شرایط مرزی $f'(\circ) = \int_0^1 f(x)dx = \circ$ بر روی اعضای فضای $\mathcal{H}_\Psi^3[0, 1]$ به دست آورده و به ساختن هسته‌ی بازتولید آن می‌پردازیم.

تعریف ۶.۱.۱. فضای ${}_c\mathcal{H}_\Psi^3[0, 1]$ را فضای متشکل از توابعی به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$${}_c\mathcal{H}_\Psi^3[0, 1] = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f, f', f'' \in \mathcal{AC}[0, 1], \\ f'(\circ) = \int_0^1 f(x)dx = \circ, f''' \in L^\Psi[0, 1]\}.$$

ضرب داخلی و نرم روی فضای ${}_c\mathcal{H}_\Psi^3[0, 1]$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\langle f, g \rangle_{{}_c\mathcal{H}_\Psi^3} = f(\circ)g(\circ) + f'(\circ)g'(\circ) \\ + f''(\circ)g''(\circ) + \int_0^1 f'''(x)g'''(x)dx, f, g \in {}_c\mathcal{H}_\Psi^3,$$

$$\|f\|_{{}_c\mathcal{H}_\Psi^3} = \sqrt{\langle f, f \rangle_{{}_c\mathcal{H}_\Psi^3}}, f \in {}_c\mathcal{H}_\Psi^3.$$

اکنون روشی را برای به دست آوردن تابع هسته‌ی بازتولید $K_y^\nu(x)$ در فضای ${}^c\mathcal{H}_\nu^\nu[0, 1]$ بیان می‌کنیم. فرض کنید $K_y^\nu(x)$ هسته‌ی بازتولید فضای ${}^c\mathcal{H}_\nu^\nu[0, 1]$ باشد، در این صورت برای هر $f \in {}^c\mathcal{H}_\nu^\nu[0, 1]$ تابع هسته‌ی بازتولید در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\langle f, K_y^\nu \rangle_{{}^c\mathcal{H}_\nu^\nu} = \sum_{j=0}^{\nu} f^{(j)}(0) \frac{\partial^j}{\partial x^j} K_y^\nu(0) + \int_0^1 f'''(x) \frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_y^\nu(x) dx + r(y) \int_0^1 f(x) dx = f(y).$$

اکنون با استفاده‌ی مکرر از انتگرال‌گیری جزء به جزء داریم:

$$\langle f, K_y^\nu \rangle_{{}^c\mathcal{H}_\nu^\nu} = \sum_{j=0}^{\nu} f^{(j)}(0) \frac{\partial^j}{\partial x^j} K_y^\nu(0) + \sum_{j=0}^{\nu} (-1)^{\nu-j} f^{(j)}(x) \frac{\partial^{\delta-j}}{\partial x^{\delta-j}} K_y^\nu(x) \Big|_{x=0} - \int_0^1 f(x) \frac{\partial^\delta}{\partial x^\delta} K_y^\nu(x) dx + r(y) \int_0^1 f(x) dx = f(y).$$

برای برقراری رابطه‌ی $\langle f, K_y^\nu \rangle_{{}^c\mathcal{H}_\nu^\nu} = f(y)$ کافی است داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial^j}{\partial x^j} K_y^\nu(0) + (-1)^{\nu-j} \frac{\partial^{\delta-j}}{\partial x^{\delta-j}} K_y^\nu(0) = 0, & j = 0, \nu, \\ \frac{\partial^{\delta-j}}{\partial x^{\delta-j}} K_y^\nu(1) = 0, & j = 0, 1, \nu, \end{cases} \quad (14.1)$$

و

$$-\frac{\partial^\delta}{\partial x^\delta} K_y^\nu(x) + r(y) = \delta(x - y), \quad (15.1)$$

که معادله‌ی (15.1) برای $y \neq x$ دارای معادله مشخصه‌ی $\lambda^\delta = 0$ با مقدار مشخصه‌ی $\lambda = 0$ با تکرار δ است.

شکل کلی $K_y^\nu(x)$ به صورت زیر است:

$$K_y^\nu(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{\delta} c_j(y) x^{j-1} + \frac{r(y)x^\delta}{\delta!}, & x < y, \\ \sum_{j=1}^{\delta} d_j(y) x^{j-1} + \frac{r(y)x^\delta}{\delta!}, & y \leq x. \end{cases} \quad (16.1)$$

با توجه به ویژگی‌های تابع دلتای دیراک داریم:

$$\lim_{x \rightarrow y^+} \frac{\partial^j K_y^\nu(x)}{\partial x^j} = \lim_{x \rightarrow y^-} \frac{\partial^j K_y^\nu(x)}{\partial x^j}, \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (17.1)$$

و

$$\lim_{x \rightarrow y^+} \frac{\partial^\alpha K_y^\alpha(x)}{\partial x^\alpha} - \lim_{x \rightarrow y^-} \frac{\partial^\alpha K_y^\alpha(x)}{\partial x^\alpha} = -1. \quad (18.1)$$

همچنین با توجه به اینکه $K_y^\alpha(x) \in {}_c\mathcal{H}_\alpha^\alpha$ دو معادله‌ی زیر را نیز داریم:

$$\frac{\partial}{\partial x} K_y^\alpha(\circ) = \circ, \quad (19.1)$$

$$\int_\circ^1 K_y^\alpha(x) dx = \circ. \quad (20.1)$$

رابطه‌ی (۱۶.۱) دارای ۱۳ مجهول $c_j(t), d_j(t), (j = 1, 2, \dots, 6)$ و $r(y)$ است که با حل معادلات (۱۴.۱)، (۱۷.۱)، (۱۸.۱)، (۱۹.۱) و (۲۰.۱) به دست می‌آیند.

قضیه ۱۳.۱.۱. فضای ${}_c\mathcal{H}_\alpha^\alpha[\circ, 1]$ ، زیرفضای بسته‌ای از فضای $\mathcal{H}_\alpha^\alpha[\circ, 1]$ است.

برهان ۱۴. مشابه برهان قضیه‌ی ۱۲.۱.۱ می‌توان این قضیه را اثبات نمود.

فصل ۲

روش هسته‌ی بازتولید برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی غیرخطی

در این پژوهش، روش هسته‌ی بازتولید برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی غیرخطی با یک شرط انتگرالی به شکل زیر مورد بررسی قرار می‌گیرد:

$$y'(x) = f(t, y(x), v(y(x)), w(y(x))), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.2)$$

$$y(0) - y(1) - \int_0^1 D(s)y(s)ds = 0, \quad (2.2)$$

که در آن

$$v(y(x)) = \int_0^1 k_1(s, x)G(y(s))ds \quad (\text{الف})$$

$$w(y(x)) = \int_0^x k_2(s, x)H(y(s))ds \quad (\text{ب})$$

(ج) $y(x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ تابع مجهول است.

(د) $k_1 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ و $k_2 : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ هسته‌های معادله انتگرال هستند.

۱.۲ فضای هسته‌ی بازتولید

۱.۱.۲ فضای $W_1^1[0, T]$

فضای توابع $W_1^1[0, T]$ را به صورت:

$$W_1^1[0, T] = \{y : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \mid y \in \mathcal{AC}[0, T], y' \in L^2[0, T]\},$$

همراه با ضرب داخلی:

$$\langle y, z \rangle_{W_1^1} = u(0)v(0) + \int_0^T y'(x)z'(x)dx,$$

و نرم:

$$\|y\|_{W_1^1} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{W_1^1}},$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $y, z \in W_1^1$.

واضح است که فضای $W_1^1[0, T]$ ، فضای هسته‌ی بازتولید هیلبرت و هسته‌ی بازتولید آن به صورت زیر است:

$$R_s(x) = \begin{cases} 1 + s, & s \leq x, \\ 1 + x, & s > x. \end{cases} \quad (3.2)$$

۲.۱.۲ فضای ${}_cW_1^m[0, 1]$

تعریف ۱.۱.۲. فضای توابع ${}_cW_1^m[0, 1]$ ($m \geq 2$) را به صورت:

$${}_cW_1^m[0, 1] = \{y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid y, y', \dots, y^{(m-1)} \in \mathcal{AC}[0, 1], \\ y(0) - y(1) - \int_0^1 D(s)y(s)ds = 0, y^{(m)} \in L^2[0, 1]\},$$

همراه با ضرب داخلی:

$$\langle y, z \rangle_{{}_cW_1^m} = y(0)z(0) + y'(0)z'(0) \\ + \dots + y^{(m-1)}(0)z^{(m-1)}(0) + \int_0^1 y^{(m)}(x)z^{(m)}(x)dx,$$

و نرم:

$$\|y\|_{cW_{\Psi}^m} = \sqrt{\langle y, y \rangle_{cW_{\Psi}^m}},$$

تعریف می‌کنیم، که در آن $y, z \in cW_{\Psi}^m$,

اکنون روشی برای به دست آوردن تابع هسته‌ی بازتولید $K_s(x)$ در فضای $cW_{\Psi}^m[0, 1]$ بیان می‌کنیم. فرض می‌کنیم $K_s(x)$ تابع هسته‌ی بازتولید فضای $cW_{\Psi}^m[0, 1]$ باشد، تابع هسته‌ی بازتولید $K_s(x)$ در رابطه‌ی زیر صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} \langle y(x), K_s(x) \rangle_{cW_{\Psi}^m} &= \sum_{j=0}^{m-1} y^{(j)}(0) \frac{\partial^j}{\partial x^j} K_s(0) + \int_0^1 y^{(m)}(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m} K_s(x) dx \\ &+ r(s)(y(0) - y(1) - \int_0^1 D(s)y(s) ds) = y(s). \end{aligned}$$

که در آن $y \in [0, 1]$ و $y(x) \in cW_{\Psi}^m$ می‌باشند. اکنون با استفاده مکرر از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء داریم:

$$\begin{aligned} \langle y(x), K_s(x) \rangle_{cW_{\Psi}^m} &= \sum_{j=0}^{m-1} y^{(j)}(0) \frac{\partial^j}{\partial x^j} K_s(0) \\ &+ \sum_{j=0}^{m-1} (-1)^{m-1-j} y^{(j)}(x) \frac{\partial^{m-1-j}}{\partial x^{m-1-j}} K_s(x) \Big|_{x=0} \\ &- \int_0^1 y(x) \frac{\partial^m}{\partial x^m} K_s(x) dx \\ &+ r(s)(y(0) - y(1) - \int_0^1 D(s)y(s) ds) = y(s). \end{aligned}$$

برای برقراری رابطه‌ی $\langle y(x), K_s(x) \rangle_{cW_{\Psi}^m} = y(s)$ کافی است داشته باشیم:

$$\begin{cases} \frac{\partial^j}{\partial x^j} K_s(0) + (-1)^{m-1-j} \frac{\partial^{m-1-j}}{\partial x^{m-1-j}} K_s(0) + r(s) = 0, & j = 0 \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j} K_s(0) + (-1)^{m-1-j} \frac{\partial^{m-1-j}}{\partial x^{m-1-j}} K_s(0) = 0, & j = 1, \dots, m-1 \\ \frac{\partial^{m-1-j}}{\partial x^{m-1-j}} K_s(1) = 0, & j = 0, \\ \frac{\partial^{m-1-j}}{\partial x^{m-1-j}} K_s(1) - r(s) = 0, & j = 1, \dots, m-1 \end{cases} \quad (4.2)$$

و

$$-\frac{\partial^m}{\partial x^m} K_s(x) + r(s)D(x) = \delta(x-s), \quad (5.2)$$

معادله‌ی (۵.۲) دارای معادله‌ی مشخصه‌ی $\lambda^{2m} = 0$ با مقدار مشخصه‌ی $\lambda = 0$ با تکرار $2m$ است. شکل کلی $K_s(x)$ به صورت زیر است:

$$K_s(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{2m} c_j(s)x^{j-1} + r(s)W(x), & x < s, \\ \sum_{j=1}^{2m} d_j(s)x^{j-1} + r(s)W(x), & s \leq x, \end{cases} \quad (6.2)$$

که در آن $W(x) = \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_{2m-2}} \int_0^{x_{2m-1}} D(x_{2m}) dx_{2m} \dots dx_2 dx_1$ با توجه به ویژگی‌های تابع دلتای دیراک داریم:

$$\frac{\partial^j K_s(x)}{\partial x^j} \Big|_{x=s^+} = \frac{\partial^j K_s(x)}{\partial x^j} \Big|_{x=s^-}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, 2m - 2, \quad (7.2)$$

و

$$\frac{\partial^{2m-1} K_s(x)}{\partial x^{2m-1}} \Big|_{x=s^+} - \frac{\partial^{2m-1} K_s(x)}{\partial x^{2m-1}} \Big|_{x=s^-} = -1. \quad (8.2)$$

همچنین با توجه به اینکه $K_s(x) \in {}_c W_{2m}^m$ معادله‌ی زیر را نیز داریم:

$$K_s(0) - K_s(1) - \int_0^1 K_s(x)y(x)dx = 0, \quad (9.2)$$

رابطه‌ی (۶.۲) دارای $4m + 1$ مجهول $c_j(x), d_j(x), (j = 1, 2, \dots, 2m)$ و $r(s)$ است که با حل معادله (۴.۲) و معادلات (۷.۲)–(۹.۲) به دست می‌آیند.

۲.۲ جواب در فضای هسته باز تولید

فرض می‌کنیم مساله‌ی (۱.۲) و (۲.۲) دارای جواب یکتا بوده و جواب متعلق به فضای هسته‌ی باز تولید ${}_c W_{2m}^m[0, 1]$ ($m \geq 2$) باشد. اکنون عملگر خطی $L : {}_c W_{2m}^m[0, 1] \rightarrow W_1^1[0, 1]$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$Ly(x) = y'(x).$$

پس مسئله (۱.۲) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$Ly(x) = f(x, y(x), v(y(x)), w(y(x))) \quad (10.2)$$

واضح است که عملگر خطی L کران دار است.

فرض می‌کنیم $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک مجموعه چگال در بازه $[0, 1]$ بوده و قرار می‌دهیم $\rho_i(x) = R_x(x_i)$ که در آن

$R_s(x)$ هسته‌ی فضای بازتولید $W_p^1[0, 1]$ است.

از آنجایی که عملگر خطی تعریف شده کران‌دار است، پس عملگر الحاقی $L^* : W_p^1[0, 1] \rightarrow_c W_p^m[0, 1]$ به صورت یکتا تعیین می‌شود. اکنون قرار می‌دهیم $\theta_i(x) = L^* \rho_i(x)$. در قضیه‌ی زیر نشان می‌دهیم که دنباله $\{\theta_i(\tau)\}_{i=1}^\infty$ یک دستگاه متعامد کامل تشکیل می‌دهد.

قضیه ۱.۲.۲. فرض کنید $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ زیرمجموعه چگال در بازه $[0, 1]$ باشد، آنگاه $\{\theta_i(x)\}_{i=1}^\infty$ یک دستگاه متعامد کامل از فضای $cW_p^m[0, 1]$ بوده و داریم:

$$\theta_i(x) = L_s K_s(x)|_{s=x_i},$$

که در آن زیرنویس s در عملگر خطی L بیانگر این است که عملگر L به عنوان تابعی از s به کار برده می‌شود.

به منظور به دست آوردن دنباله متعامد یکه $\{\bar{\theta}_i(x)\}_{i=1}^\infty$ از فضای هسته‌ی بازتولید $cW_p^m[0, 1]$ ، فرآیند متعامدسازی گرام اشمیت را بکار می‌بریم، بنابراین داریم:

$$\bar{\theta}_i(x) = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} \theta_k(x), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

قضیه ۲.۲.۲. فرض کنید $\{x_i\}_{i=1}^\infty$ زیرمجموعه چگال در بازه $[0, 1]$ باشد، همچنین جواب مسئله (۱۰.۲) یکتا باشد، آنگاه جواب مسئله‌ی (۱۰.۲) به شکل زیر است:

$$y(x) = \sum_{i=1}^\infty \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, y(x_k), v(y(x_k)), w(y(x_k))) \bar{\rho}_i(x) \in_c cW_p^m[0, 1], \quad (11.2)$$

۱.۲.۲ محاسبه تقریب

از آنجایی که در رابطه‌ی (۱۱.۲) مقدار $f(x_k, y(x_k), v(y(x_k)), w(y(x_k)))$ مجهول است، یک روش تکراری برای تقریب جواب ارائه می‌دهیم.

به منظور محاسبه‌ی جواب تقریبی، $y_0 \in_c cW_p^m[0, 1]$ را انتخاب می‌کنیم و با استفاده از رابطه‌ی (۱۰.۲) دنباله‌ی تکراری زیر را می‌سازیم:

$$\begin{cases} Lz_n(x) = f(x, y_{n-1}(x), v(y_{n-1}(x)), w(y_{n-1}(x))), \\ y_n(x) = P_n z_n(x), \end{cases} \quad (12.2)$$

که در آن $z_n \in_c cW_p^m[0, 1]$ جواب (۱۲.۲) است و $\{\bar{\rho}_1(x), \bar{\rho}_2(x), \dots, \bar{\rho}_n(x)\}$ یک تصویرگر متعامد است.

قضیه ۳.۲.۲. فرض کنید $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ زیرمجموعه چگال شمارش پذیر در بازه $[0, 1]$ باشد و بیشتر اینکه جواب مسئله‌ی (۱۲.۲) یکتا باشد، آنگاه جواب مسئله‌ی (۱۲.۲) به شکل زیر است:

$$z_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{H}_i \bar{\rho}_i(x), \quad n = 1, 2, \dots,$$

که در آن $\mathbf{H}_i = \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, y_{n-1}(x_k), v(y_{n-1}(x_k)), w(y_{n-1}(x_k)))$

بنابراین تقریب مرتبه n -ام جواب به صورت زیر است:

$$y_n(x) = P_n z_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbf{H}_i \bar{\rho}_i(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (13.2)$$

که در آن \mathbf{H}_i به صورت زیر است:

$$\begin{cases} \mathbf{H}_1 = \beta_{11} f(s, y_0(x_1), v(y_0(x_1)), w(y_0(x_1))), \\ \mathbf{H}_2 = \sum_{k=1}^2 \beta_{2k} f(x_k, y_{k-1}(x_k), v(y_{k-1}(x_k)), w(y_{k-1}(x_k))), \\ \mathbf{H}_3 = \sum_{k=1}^3 \beta_{3k} f(x_k, y_{k-1}(x_k), v(y_{k-1}(x_k)), w(y_{k-1}(x_k))), \\ \vdots \end{cases}$$

۳.۲ آنالیز همگرایی و خطا

در این قسمت از مقاله وجود جواب برای مسئله‌ی (۱.۲) را مورد بحث قرار داده و همچنین اثبات می‌کنیم که جواب تقریبی (۱۳.۲) همگرا به جواب دقیق است.

قضیه ۱.۳.۲. $B = \{y_n(x) \mid \|y_n\|_{C[W^m[0,1]]} \leq \gamma\} \subset C[0, 1]$. که در آن γ یک ثابت حقیقی است، یک مجموعه کران دار است.

برهان. می‌دانیم که:

$$\|y_n\|_{\infty} \leq \alpha \|y_n\|_{C[W^m[0,1]]}, \quad (14.2)$$

که در آن α ثابت حقیقی مثبت است.

بنابراین برای هر $x \in [0, 1]$ و $y_n(x) \in B$ ثابت حقیقی مثبت $\gamma < \infty$ موجود است به طوری که $\|y_n\|_{\infty} \leq \gamma$.

□

که این اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۲.۳.۲. $B = \{y_n(x) \mid \|y_n\|_{C[W^m[0,1]]} \leq \gamma\} \subset C[0, 1]$. که در آن γ یک ثابت حقیقی است، یک مجموعه‌ی همپیوسته است.

برهان. از قضیه‌ی (۱.۳.۲) نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} |y_n(s') - y_n(s'')| &= |\langle y_n(x), K_{s'}(x) - K_{s''}(x) \rangle_{cW_{\dot{V}}^m[0,1]}| \\ &\leq \|y_n\|_{cW_{\dot{V}}^m[0,1]} \|K_{s'} - K_{s''}\|_{cW_{\dot{V}}^m[0,1]} \\ &\leq \|y_n\|_{cW_{\dot{V}}^m[0,1]} \left\| \frac{d}{ds} K_s \Big|_{s \in [s', s'']} \right\|_{cW_{\dot{V}}^m[0,1]} |s' - s''| \\ &\leq \omega |s' - s''|, \end{aligned}$$

که در آن ω ثابت حقیقی است.

با انتخاب $\delta = \frac{\epsilon}{\omega}$ برای هر $s', s'' \in [0, 1]$ داریم:

$$|s' - s''| < \delta \Rightarrow |y_n(s') - y_n(s'')| < \epsilon.$$

□

که این اثبات را کامل می‌کند.

قضیه ۳.۳.۲. اگر شرایط زیر برقرار باشد:

(الف) $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ یک زیر مجموعه چگال از بازه $[0, 1]$ است.

(ب) $B = \{y_n(x) \mid \|y_n\|_{cW_{\dot{V}}^m[0,1]} \leq \gamma\} \subset C[0, 1]$

(ج) تابع $f(x, y, v, w)$ پیوسته است که در آن $x \in [0, 1]$ و $y = y(x), v = v(y(x)), w = w(y(x)) \in \mathbb{R}$ و $\{y_{n_\kappa}\}_{\kappa=1}^{\infty} \subseteq B$ و $y(x) \in C[0, 1]$ موجود است به‌طوریکه:

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{\kappa \rightarrow \infty} y_{n_\kappa}(x) \\ &= \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_\kappa} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, y_{n_\kappa-1}(x_k), v(y_{n_\kappa-1}(x_k)), w(y_{n_\kappa-1}(x_k))) \bar{\rho}_i(x). \end{aligned} \quad (15.2)$$

برهان. مجموعه B کران‌دار و همپیوسته است پس هر دنباله در B یک زیردنباله همگرا دارد که حد آن متعلق به B

□

است. بنابراین زیردنباله‌ی $\{y_{n_\kappa}\}_{\kappa=1}^{\infty}$ از B موجود است، بطوریکه $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \|y_{n_\kappa} - y\|_\infty = 0$.

نکته ۱.۳.۲. فرض کنیم شرایط قضیه‌ی (۳.۳.۲) برقرار باشد و داشته باشیم:

$$y(x) = \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n_\kappa} \sum_{k=1}^i \beta_{ik} f(x_k, y_{n_\kappa-1}(x_k), v(y_{n_\kappa-1}(x_k)), w(y_{n_\kappa-1}(x_k))) \bar{\rho}_i(x).$$

با توجه به پیوستگی $f(x, y, v, w)$ و با استفاده از معادله‌ی (۱۲.۲) داریم:

$$Ly(x) = f(x, y(x), v(y(x)), w(y(x))).$$

بنابراین با شرایط قضیه‌ی (۳.۳.۲)، زیردنباله $\{y_{n_\kappa}\}_{\kappa=1}^\infty$ از B همگراست و حدش جواب معادله‌ی (۱۲.۲) است.

اکنون در قضیه‌ی زیر با لحاظ کردن شرط وجود و یکتایی جواب را اثبات می‌کنیم که دنباله $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ به جواب (۱۵.۲) به طور یکنواخت همگراست.

قضیه ۴.۳.۲. هرگاه شرایط قضیه‌ی (۳.۳.۲) برقرار و همچنین جواب معادله‌ی (۱۲.۲) موجود و یکتا باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\| \rightarrow 0.$$

برهان. فرض کنیم $\{y_n\}_{n \geq 1} \subset B$ همگرا به y نباشد، بنابراین یک عدد مثبت ϵ_0 و زیردنباله $\{y_{n_\kappa}\}_{\kappa \geq 1} \subset B$ موجود است به طوری که:

$$\|y_{n_\kappa} - y\|_\infty \geq \epsilon_0, \quad \kappa = 1, 2, \dots, \quad (۱۶.۲)$$

از آنجایی که $\{y_{n_\kappa}\}_{\kappa \geq 1} \subset B$ یک زیر مجموعه از توابع کران دار و پیوسته از فضای توابع پیوسته است، بنابراین یک زیر دنباله از آن موجود است، بطوریکه به \hat{y} همگرا است. بدون اینکه به کلیت خللی وارد شود، می‌توان فرض نمود که $\{y_{n_\kappa}\}_{\kappa \geq 1}$ به \hat{y} به طور یکنواخت همگرا است، بنابراین داریم:

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \|y_{n_\kappa} - \hat{y}\|_\infty \rightarrow 0. \quad (۱۷.۲)$$

از آنجایی که جواب معادله‌ی (۱۲.۲) موجود و یکتا است، رابطه‌ی (۱۷.۲) با رابطه‌ی (۱۶.۲) متناقض است. که این اثبات را کامل می‌کند. \square

قضیه ۵.۳.۲. هرگاه شرایط قضیه‌ی (۳.۳.۲) برقرار و همچنین جواب معادله‌ی (۱۲.۲) موجود و یکتا باشد، آنگاه داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n^{(k)} - y^{(k)}\|_\infty \rightarrow 0, \quad k = 1, 2, \dots, m-1.$$

برهان. مشابه برهان قضیه‌ی ۴.۳.۲، می‌توان این قضیه را نیز اثبات نمود. \square

۱.۳.۲ آنالیز خطا

در این قسمت از مقاله آنالیز خطای روش پیشنهادی برای حل معادلات دیفرانسیل-انتگرال را ارائه می‌دهیم.

قضیه ۶.۳.۲. فرض کنیم شرایط قضیه‌ی (۴.۳.۲) برقرار باشد. اگر y_n ، جواب تقریبی بدست آمده برای معادله‌ی

(۱۲.۲) در فضای $cW_{\mathcal{P}}^m[0, 1]$ باشد آنگاه داریم:

$$\|y_n^{(k)} - y^{(k)}\|_{\infty} \leq \alpha_{m-k-1} h^{m-k-1}, \quad k = 0, 1, \dots, m-2,$$

که در آن $h = \max_{1 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$ و ثابت‌های حقیقی $\alpha_{m-k-1}, k = 0, 1, \dots, m-2$

برهان. $\epsilon > 0$ را به دلخواه انتخاب می‌کنیم. اکنون در زیربازه $[x_j, x_{j+1}] \subset [0, 1]$ با استفاده از قضیه‌ی (۵.۳.۲)، برای مقادیر n به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\begin{aligned} |y^{(m-2)}(x) - y_n^{(m-2)}(x)| &\leq |y^{(m-2)}(x) - y^{(m-2)}(x_j)| \\ &\quad + |y_n^{(m-2)}(x_j) - y_n^{(m-2)}(x)| + \epsilon. \end{aligned} \quad (18.2)$$

از آنجایی که $y^{(m-2)}(x) \in cW_{\mathcal{P}}^m[0, 1]$ ، بنابراین $\kappa \geq 0$ موجود است بطوریکه:

$$|y^{(m-2)}(x) - y^{(m-2)}(x_j)| \leq \kappa h. \quad (19.2)$$

با توجه به رابطه زیر:

$$y_n^{(m-2)}(x_j) - y_n^{(m-2)}(x) = \int_x^{x_j} y_n^{(m-1)}(t) dt,$$

ثابت حقیقی مثبت λ موجود است، بطوریکه:

$$|y_n^{(m-2)}(x_j) - y_n^{(m-2)}(x)| \leq \lambda h. \quad (20.2)$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌های (۱۸.۲)، (۱۹.۲) و (۲۰.۲) داریم:

$$|y^{(m-2)}(x) - y_n^{(m-2)}(x)| \leq \epsilon + \gamma h. \quad (21.2)$$

می‌دانیم که:

$$\begin{aligned} y^{(k)}(x) - y_n^{(k)}(t) &= y^{(k)}(x_j) - y_n^{(k)}(x_j) \\ &\quad + \int_{x_j}^x (y^{(k+1)}(t) - y_n^{(k+1)}(t)) dt, \quad k = 0, 1, \dots, m-3. \end{aligned} \quad (22.2)$$

□ اکنون با استفاده از رابطه‌های (۲۱.۲) و (۲۲.۲) و بکارگیری قضیه‌های ۴.۳.۲ و ۵.۳.۲ اثبات کامل است.

۴.۲ مثال‌های عددی

در این قسمت دو مثال آورده شده است تا کارایی این روش در حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی با یک شرط انتگرالی را نشان دهیم. برای نشان دادن دقت جواب تقریبی خطای زیر را گزارش می‌کنیم:

$$e_n^{(i)} \approx \max_{1 \leq i \leq n} |y^{(i)}(x_i) - y_n^{(i)}(x_i)|, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m-1.$$

مثال ۱.۴.۲. معادله انتگرال-دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} y'(x) &= g(x) + 2e^x y(x) \int_0^1 e^{s-x} y(s) ds \\ &+ \int_0^x (s-x) y^2(s) ds, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ g(x) &= -\frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}(x+2)x^5 - \frac{1}{4}(2x+1)x^4 \\ &+ \frac{1}{3}x^4 + (6-2e)x^2 + (2e-8)x + 1, \end{aligned}$$

با شرط انتگرالی:

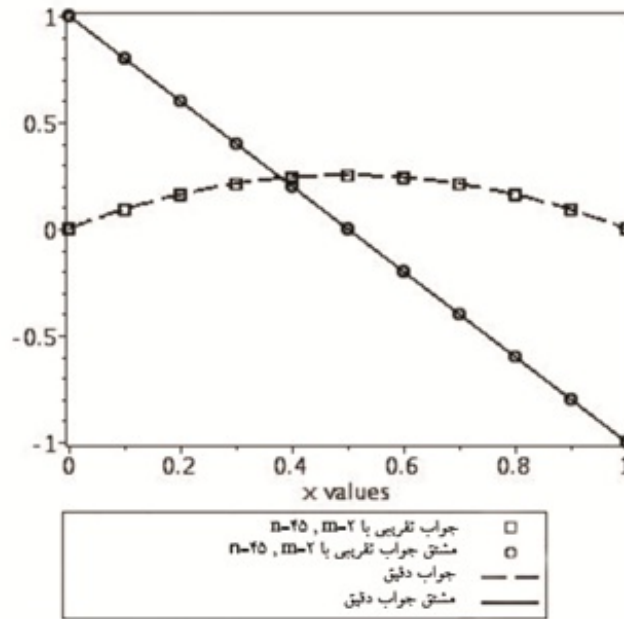
$$y(0) - \int_0^1 s^2(2-3s)y(s) ds = 0.$$

جواب دقیق این مساله $y(x) = x - x^2$ است.

با انتخاب نقاط گرهی $\{x_i = \frac{i}{n}\}_{i=1}^n$ و بکارگیری روش پیشنهادشده می‌توانیم جواب تقریبی را برای معادله‌ی مذکور بدست آوریم. در جدول ۱، مقادیر خطای بیشینه، گویای این مطلب است که روش پیشنهادی برای یافتن جواب‌های تقریبی با درجه دقت بالا مناسب است. در شکل ۱ تقریب‌های $y_{\Delta}^{(i)}, i = 0, 1$ در فضای $CW_{\Delta}^2[0, 1]$ نشان داده شده است.

n	$e_n(y_n \in CW_{\Delta}^2)$	$e'_n(y_n \in CW_{\Delta}^2)$
۳۰	$8,721 \times 10^{-5}$	$6,721 \times 10^{-4}$
۳۵	$2,491 \times 10^{-5}$	$4,801 \times 10^{-4}$
۴۰	$2,491 \times 10^{-5}$	$4,893 \times 10^{-4}$
۴۵	$4,199 \times 10^{-6}$	$2,982 \times 10^{-5}$

جدول ۱: خطای ماکزیمم گسسته جواب در فضای $CW_{\Delta}^2[0, 1]$ (مثال ۱).



شکل ۱.۲: تقریب‌های $y_{\delta\delta}^i, i = 0, 1$ در فضای $C[W_1^2][0, 1]$ (مثال ۱)

مثال ۲.۴.۲. معادله انتگرال-دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$y'(x) = g(x) + \int_0^1 sy^2(s)ds + \int_0^x (s-x)y^2(s)ds, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

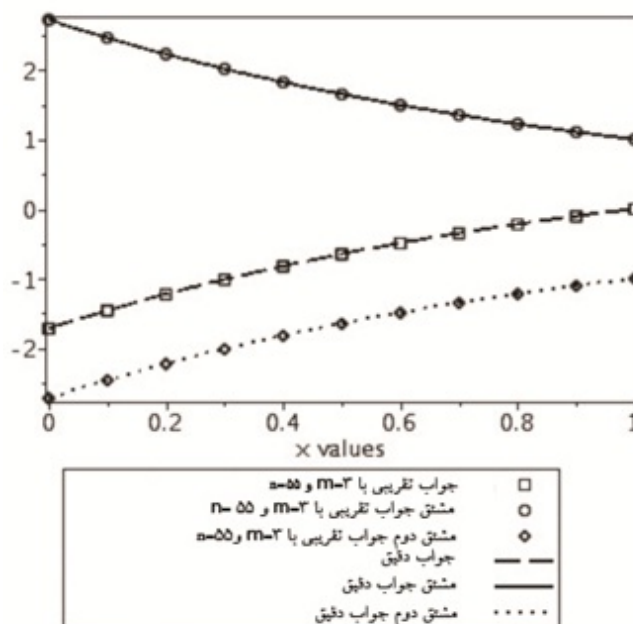
$$g(x) = -e^{-x+1} - \frac{15}{4} + 4e - \frac{1}{4}e^2 - 2ex + \frac{1}{4}e^2x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}e^{-2x+2},$$

با شرط انتگرالی:

$$y(0) - \frac{(1-e)}{(2-e)} \int_0^1 y(s)ds = 0.$$

جواب دقیق این مساله $y(x) = 1 - e^{-x+1}$ است.

با انتخاب نقاط گرهی $\{x_i = \frac{i}{n}\}_{i=1}^n$ و بکارگیری روش پیشنهادشده، می‌توانیم جواب تقریبی را برای معادله‌ی مذکور بدست آوریم. در جدول ۲، مقادیر خطای بیشینه، گویای این مطلب است که روش پیشنهادی برای یافتن جواب‌های تقریبی با درجه دقت بالا مناسب است. در شکل ۲ تقریب‌های $y_{\delta\delta}^{(i)}, i = 0, 1, 2$ در فضای $C[W_1^3][0, 1]$ نشان داده شده است.



شکل ۲.۲: تقریب‌های $y_{55}^i, i = 0, 1, 2$ در فضای ${}_cW_3^3[0, 1]$ (مثال ۲)

n	$e_n(y_n \in {}_cW_3^3)$	$e'_n(y_n \in {}_cW_3^3)$	$e''_n(y_n \in {}_cW_3^3)$
۴۰	$5/657 \times 10^{-5}$	$7/413 \times 10^{-4}$	$4/803 \times 10^{-3}$
۴۵	$8/394 \times 10^{-6}$	$7/341 \times 10^{-4}$	$4/415 \times 10^{-3}$
۵۰	$3/283 \times 10^{-6}$	$6/655 \times 10^{-5}$	$2/132 \times 10^{-3}$
۵۵	$3/091 \times 10^{-6}$	$1/612 \times 10^{-5}$	$8/193 \times 10^{-4}$

جدول ۲: خطای ماکزیمم گسسته جواب در فضای ${}_cW_3^3[0, 1]$ (مثال ۲).

۵.۲ نتیجه گیری

در این فصل از رساله به منظور یافتن جواب تقریبی از معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی همراه با شرط انتگرالی در فضای ${}_cW_3^m[0, T]$ روش هسته‌ی بازتولید هیلبرت را به کار بردیم. با توجه به آنچه در قسمت‌های قبلی از فصل بحث شد، نتایج زیر را داریم:

- الف) هسته‌ی بازتولید فضای جواب ${}_cW_3^m[0, 1]$ در شرط انتگرالی مساله صدق می‌کند.
- ب) در حل مسائل غیرخطی نمی‌توان جواب را به طور مستقیم از رابطه‌ی (۱۱.۲) بدست آورد بنابراین دنباله تکراری (۱۲.۲) را پیشنهاد کردیم و نشان دادیم جواب تقریبی و مشتقات آن به جواب دقیق و مشتقات آن همگرای یکنواخت است.

- ج) خطای تقریب را در فضای هسته‌ی بازتولید $cW_m^m[0, 1]$ بدست آوردیم و نشان دادیم که همگرایی روش برای جواب تقریبی و مشتقات آن $y_n^k, k = 0, 1, 2, \dots, m$ از مرتبه $O(h^{m-k-1})$ است.
- د) نتایج بدست‌آمده از آزمایشات عددی گویای این مطلب است که روش پیشنهادی در حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیرخطی همراه با شرط انتگرالی بسیار خوب عمل می‌کند.

مراجع

- [1] Aronszajn, N. (1951). *Theory of reproducing kernels*. Cambridge, MA: Harvard University.
- [2] Geng, F. (2009). Solving singular second order three-point boundary value problems using reproducing kernel Hilbert space method. *Applied Mathematics and Computation*, 215(6), 2095-2102. doi:10.1016/j.amc.2009.08.002
- [3] Zhou, Y., Cui, M., & Lin, Y. (2009). Numerical algorithm for parabolic problems with non-Classical conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 230(2), 770-780. doi:10.1016/j.cam.2009.01.012.
- [4] Jiang, W., Cui, M., & Lin, Y. (2010). Anti-periodic solutions for Rayleigh-type equations via the reproducing kernel Hilbert space method. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 15(7), 1754-1758. doi:10.1016/j.cnsns.2009.07.022
- [5] Geng, F. (2011). A novel method for solving a class of singularly perturbed boundary value problems based on reproducing kernel method. *Applied Mathematics and Computation*, 218(8), 4211-4215. doi:10.1016/j.amc.2011.09.052
- [6] Geng, F., & Cui, M. (2012). A reproducing kernel method for solving nonlocal fractional boundary value problems. *Applied Mathematics Letters*, 25(5), 818-823. doi:10.1016/j.aml.2011.10.025
- [7] Geng, F. Z., & Li, X. M. (2012). A New Method for Riccati Differential Equations Based on Reproducing Kernel and Quasilinearization Methods. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, 1-8. doi:10.1155/2012/603748
- [8] Arqub, O. A., Al-Smadi, M., & Shawagfeh, N. (2013). Solving Fredholm integro-differential equations using reproducing kernel Hilbert space method. *Applied Mathematics and Computation*, 219(17), 8938-8948. doi:10.1016/j.amc.2013.03.006
- [9] Inc, M., Akgül, A., & Geng, F. (2014). Reproducing Kernel Hilbert Space Method for Solving Bratu's Problem. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 38(1), 271-287. doi:10.1007/s40840-014-0018-8
- [10] Babolian, E., Javadi, S., & Moradi, E. (2015). RKM for solving Bratu-type differential equations of fractional order. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(6), 1548-1557. doi:10.1002/mma.3588

-
- [11] Cui, M., & Geng, F. (2007). A computational method for solving one-dimensional variable-coefficient Burgers equation. *Applied Mathematics and Computation*, 188(2), 1389-1401. doi:10.1016/j.amc.2006.11.005
- [12] Geng, F., & Cui, M. (2007). Solving a nonlinear system of second order boundary value problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 327(2), 1167-1181. doi:10.1016/j.jmaa.2006.05.011
- [13] Lv, X., & Cui, M. (2010). An efficient computational method for linear fifth-order two-point boundary value problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(5), 1551-1558. doi:10.1016/j.cam.2010.02.036
- [14] Mohammadi, M., & Mokhtari, R. (2011). Solving the generalized regularized long wave equation on the basis of a reproducing kernel space. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 235(14), 4003-4014. doi:10.1016/j.cam.2011.02.012
- [15] Wang, Y., Du, M., Tan, F., Li, Z., & Nie, T. (2013). Using reproducing kernel for solving a class of fractional partial differential equation with non-classical conditions. *Applied Mathematics and Computation*, 219(11), 5918-5925. doi:10.1016/j.amc.2012.12.009
- [16] Mohammadi, M., & Mokhtari, R. (2014). A Reproducing Kernel Method for Solving a Class of Nonlinear Systems of PDEs. *Mathematical Modelling and Analysis*, 19(2), 180-198. doi:10.3846/13926292.2014.909897
- [17] Han, B. (2012). Reproducing Kernel Methods for Solving Inverse Problems. *Journal of Applied & Computational Mathematics*, 01(04). doi:10.4172/2168-9679.1000e112
- [18] Inc, M., Akgül, A., & Kiliçman, A. (2012). Explicit Solution of Telegraph Equation Based on Reproducing Kernel Method. *Journal of Function Spaces and Applications*, 2012, 1-23. doi:10.1155/2012/984682
- [19] Özen, K., Oruçoğlu, K., Simos, T. E., Psihoyios, G., Tsitouras, C., & Anastassi, Z. (2011). Investigation of Numerical Solution for Fourth-Order Nonlocal Problem by the Reproducing Kernel Method. doi:10.1063/1.3637822

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

absolutely continuous	مطلقا پیوسته
absolutely convergent	مطلقا همگرا
accuracy	دقت
adjoint operator	عملگر الحاقی
approximate solution	جواب تقریبی
characteristic equation	معادله مشخصه
compact	فشرده
complete set	مجموعه کامل
completely continuous function	تابع کاملا پیوسته
closed subspace	زیرفضای بسته
dense	چگال
eigenvalue	مقدار ویژه
equicontinuous	هم پیوسته
exact solution	جواب دقیق
functional	تابعک
Gram-Schmidt	گرام-اشمیت
Hilbert space	فضای هیلبرت
homogeneous	همگن
inner product space	فضای ضرب داخلی
integral condition	شرط انتگرالی
kernel	هسته
nonlinear	غیرخطی

nonlocal boundary condition	شرط مرزی غیرموضعی
order of convergence	مرتبه همگرایی
orthogonal	متعامد
orthogonalization	متعامدسازی
orthogonal matrix	ماتریس متعامد
orthonormal	متعامد یکه
pointwise convergent	همگرایی نقطه‌وار
polynomial	چندجمله‌ای
positive definite	معین مثبت
reproducing kernel space	فضای هسته‌ی بازتولید
uniform convergent	همگرایی یکنواخت

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

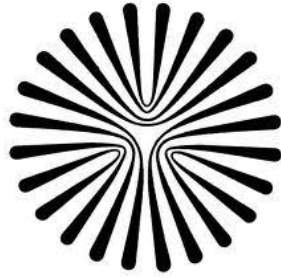
approximation	تقریب
approximate solution	جواب تقریبی
exact solution	جواب دقیق
numerical solution	جواب عددی
dense	چگال
polynomial	چندجمله‌ای
interpolation	درون‌یاب
accuracy	دقت
closed subspace	زیرفضای بسته
condition	شرط
integral condition	شرط انتگرالی
initial condition	شرط اولیه
inner product	ضرب داخلی
adjoint operator	عملگر الحاقی
linear operator	عملگر خطی
nonlinear	غیرخطی
compact	فشرده
vector space	فضای برداری
inner product space	فضای ضرب داخلی
Hilbert space	فضای هیلبرت
orthogonal	متعامد
orthogonalization	متعامدسازی

absolutely continuous	مطلقا پیوسته
orthonormal	متعامد یکه
order of convergence	مرتبه همگرایی
eigenvalue	مقدار ویژه
absolutely convergent	مطلقا همگرا
characteristic equation	معادله مشخصه
reproducing kernel	هسته‌ی بازتولید
pointwise convergent	همگرایی نقطه‌وار
uniform convergent	همگرایی یکنواخت

Abstract

In this research, the reproducing kernel method for solving differential- integral equations with integral condition is proposed. The exact solution is represented in the form of series in a reproducing kernel space. Numerical examples presented to illustrate the accuracy of the proposed method. The obtained results demonstrate that proposed method is efficient.

Keywords: Integral condition, Reproducing kernel space, Error analysis, Convergence analysis.



Ministry of Science Research and Technology
Payame Noor University

Research Project

Title

**Numerical solution of differential-integral
equations with integral conditions in
reproducing kernel Hilbert space**

By

Ebrahim Amini

Mojtaba Fardi

April 2018

