

# پیشنهاد (پروپوزال) انجام طرح پژوهشی

الف) کلیات طرح:

معادله زیر

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \left(v(v+1) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y = 0,$$

که به معادله دیفرانسیل لژاندر وابسته معروف است، اغلب در فیزیک و مهندسی کاربرد فراوانی دارد. این معادله به ویژه در حل معادله لاپلاس و معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی در مختصات کروی بسیار کارساز است. جواب‌های این معادله، توابع لژاندر وابسته نوع اول و دوم  $P_v^\mu$  و  $Q_v^\mu$  هستند که در واقع برحسب انتگرال‌های لپیشیتز-هنکل با هسته انتگرالی توابع بسل تعدیل یافته نوع اول و دوم نمایش داده می‌شوند.

توابع لژاندر وابسته اخیراً توجه زیادی را به خود جلب کرده است و به طور گسترده در تعیین توابع موج الکترونها در مدار یک اتم و در تعیین توابع پتانسیل در هندسه تقارن کروی و غیره مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین در فیزیک راکتور هسته‌ای، توابع لژاندر وابسته از اهمیت فوق العاده‌ای برخوردار هستند.

زمانی که  $v = n - 1/2, n = 0, 1, 2, \dots, \mu \in R, x \in (1, \infty)$  بسیار اساسی در مسائل مقدار مرزی دارند [2,4].

در این طرح نمایش‌های انتگرالی زیر را برای توابع لژاندر وابسته در نظر می‌گیریم [5,6]:

$$P_v^{-\mu}(\cosh(\alpha)) = \frac{1}{\Gamma(v+\mu+1)} \int_0^\infty e^{-t \cosh(\alpha)} I_\mu(t \sinh(\alpha)) t^v dt, \quad \Re(v+\mu) > -1$$

$$Q_v^\mu(\cosh(\alpha)) = \frac{e^{\mu\pi i}}{\Gamma(v-\mu+1)} \int_0^\infty e^{-t \cosh(\alpha)} K_\mu(t \sinh(\alpha)) t^v dt, \quad \Re(v+1) > |\Re(\mu)|$$

$$Q_{\mu-\frac{1}{2}}^{v-\frac{1}{2}}(\cosh(\alpha)) = e^{(v-\frac{1}{2})\pi i} \sinh^{v-\frac{1}{2}}(\alpha) \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-t \cosh(\alpha)} I_\mu(t) t^{v-1} dt, \quad \Re(v+\mu) > 0$$

$$P_{\mu-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}-v}(\cosh(\alpha)) = \frac{\sinh^{v-\frac{1}{2}}(\alpha) \sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\Gamma(v-\mu)\Gamma(v+\mu)} \int_0^\infty e^{-t \cosh(\alpha)} K_\mu(t) t^{v-1} dt, \quad \Re(v) > |\Re(\mu)|$$

با توجه به ویژگی‌های بسیار مهم توابع لژاندر وابسته، برخی از نویسنده‌ها روابط بین این توابع و نمایش انتگرالی آن‌ها را ارائه داده‌اند [1-3].

هدف از این کار تحقیقاتی به دست آوردن روابط و اتحاد‌های جدیدتر و متنوع‌تر برای توابع لژاندر وابسته و نیز ارتباط آنها با توابع بسیار مهم و کاربردی بسل، استوانه سهموی و فوق هندسی است. در این تحقیق، با استفاده تابع مک دونالد (تابع بسل تعدیل یافته نوع دوم) نمایش‌های انتگرال جدید و متفاوتی برای توابع لژاندر وابسته و چنبره‌ای به دست می‌آوریم. به‌علاوه از آن‌جایی که نمایش

توابع لژاندر وابسته ذکر شده در روابط بالا به عنوان تبدیلات لاپلاس، ملین و کانترویچ-لبدف بیان می‌شوند، نمایش‌های انتگرالی جدیدی را برای حاصل ضرب توابع لژاندر وابسته با استفاده از تبدیلات انتگرال ضرب کانولوشن به دست می‌آوریم.

۱- عنوان طرح:

به فارسی: انتگرال‌های لپشیتز-هنکل و نمایش‌های انتگرال توابع چنبره ای

به انگلیسی:

Lipschitz-Hankel Integrals and Integral Representations of Toroidal Functions

۲- مجری مسئول طرح: علیرضا انصاری

دانشکده مستقر: دانشکده ریاضی

نام و نام خانوادگی: علیرضا انصاری

مرتبه علمی و سمت: دانشیار

۳- اعتبار کل طرح: 20000000 ریال اعتبار معادل طرح (حق التحقیق، هزینه پرسنلی و مسافرت): 20000000

ریال

۴- زمان اجرای طرح به ماه: ۷ ماه شروع: ۹۸/۱۰/۰۱ خاتمه: ۹۹/۰۵/۰۱

۵- محل اجرای طرح: دانشکده ریاضی دانشگاه شهرکرد

۶- منابع تأمین کننده بودجه: گرنت

۷- مؤسساتی که با طرح همکاری خواهند داشت (نحوه همکاری):

۸- خلاصه طرح (حداکثر ۵ سطر): با توجه به کاربردهای مهم توابع لژاندر وابسته و چنبره در فیزیک و مهندسی، به نمایش‌های انتگرال بیشتر و متنوع تری از این توابع و حاصل ضرب شان دست یافته ایم که برحسب توابع خاص بسط، استوانه سهموی و فوق هندسی هستند.

ب) مشخصات مجری و همکاران طرح: علیرضا انصاری و شیوا اسحاقی

۱- مجری مسئول طرح:

الف) نام و نام خانوادگی: علیرضا انصاری مرتبه علمی: دانشیار نوع استخدام: رسمی

تاریخ استخدام :

محل خدمت : دانشگاه شهرکرد

ب) نشانی منزل:

ج) به طور متوسط، چند ساعت در هفته به این پروژه اختصاص می دهید؟ ۱۰ ساعت در هفته

د) سایر طرح های در دست اجرا:

۱-

ه) مدارج تحصیلی و تخصصی (در حد کارشناسی و بالاتر):

ردیف	درجه تحصیلی / تخصصی	رشته تحصیلی / تخصصی	مؤسسه - کشور	سال دریافت
۱	کارشناسی	ریاضی کاربردی	دانشگاه صنعتی اصفهان	۱۳۸۲
۲	کارشناسی ارشد	ریاضی کاربردی	دانشگاه گیلان	۱۳۸۴
۳	دکتری	ریاضی کاربردی	دانشگاه گیلان	۱۳۸۹

و - فعالیت های تحقیقاتی، پایان یافته، در حال اجرا و تألیفات در ارتباط با موضوع طرح:

۱-

۲- سایر مجریان طرح:

نام و نام خانوادگی	درجه تحصیلی	رشته تحصیلی	مرتبۀ علمی	محل کار	میزان مشارکت مالی
اول					
دوم					
سوم					

۲- همکاران:

نام و نام خانوادگی	درجه تحصیلی	رشته تحصیلی	مرتبۀ علمی	محل کار	نوع همکاری	میزان همکاری (ساعت)
اول	دانشجو دکتری	ریاضی کاربردی		دانشگاه شهرکرد	همکار طرح	۲۰ ساعت در هفته
دوم						
سوم						

ج) اطلاعات تفصیلی طرح: معادله دیفرانسیل لژاندر وابسته به طور طبیعی در جداسازی متغیرهای جواب معادلات دیفرانسیل خطی بیضوی مرتبه دوم، معادلات دیفرانسیل جزئی پارابولیک و هایپربولیک در مختصات کروی به ویژه معادلات هلمولتز، لاپلاس و شرودینگر که در الکترواستاتیک، انتشار موج الکترومغناطیسی و جواب توابع موج اتم هیدروژن در مکانیک کوانتومی تک ذره مطرح می‌شوند، ظاهر می‌شود. بنابراین مطالعه و بررسی جواب های معادله لژاندر وابسته (یعنی توابع لژاندر وابسته) به دلیل کاربرد مختلف آنها در حل معادلات مختلف در زمینه های مهندسی و علوم فیزیکی علاقه بسیاری را اخیراً به خود جلب نموده است. برخی از نمایش‌های انتگرال برای توابع لژاندر وابسته برحسب توابع مقدماتی در منابع [1-3] آمده است. برای گسترش این بخش از علوم، ما قصد داریم فرمول‌های جدیدتر از توابع لژاندر وابسته برحسب توابع خاص بسل، استوانه سهموی و فوق هندسی به دست آوریم.

#### ۱- عنوان و نوع طرح پژوهشی

عنوان به فارسی: انتگرال های لپشیتز-هنکل و نمایش های انتگرال توابع چنبره ای

به انگلیسی: Lipschitz-Hankel Integrals and Integral Representations of Toroidal Functions

نوع طرح: ■ بنیادی (گسترش مرزهای دانش) □ کاربردی (در چارچوب اولویت های پژوهشی/حل مسئله)

۲- تشریح جزئیات طرح: توابع لژاندر وابسته و چنبره کاربرد فراوانی در فیزیک و سایر زمینه‌های فنی دارد. با این وجود نمایش‌های انتگرالی مقدماتی و اندکی برای این توابع بیان شده است. با توجه به اهمیت فوق العاده این توابع در علوم مختلف به ویژه در فیزیک هسته ای و هم چنین اهمیت موضوع نمایش انتگرالی، این کار تحقیقاتی به توسعه نمایش‌های انتگرالی برای این توابع اختصاص داده شده است.

تعریف مسئله: نمایش های انتگرالی از توابع چنبره ای و حاصلضرب توابع لژاندر وابسته

فرضیات: توابع لژاندر وابسته با هسته انتگرالی تابع مک دونالد و تبدیلات لاپلاس، ملین و کانترویچ-لبدف جزء فرضیات این مساله هستند.

اهداف اصلی: یافتن نمایش‌های انتگرالی جدید و متنوع برای توابع لژاندر وابسته و چنبره ای و حاصلضرب شان

روش و تکنیک‌های اجرایی: استفاده از اتحادهای مک دونالد و تبدیلات لاپلاس، ملین و کانترویچ-لبدف

منابع:

[1] L. M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing, Dover, New York, 1972.

[2] N. N. Lebedev, Special Functions & Their Applications, Dover Publications, New York, 1972.

[3] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of integrals, series and products, Seventh Edition, New York, Academic Press, 2007.

[4] I.N. Sneddon, The use of integral transforms, McGraw-Hill, New York, 1972.

[5] G.N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, 2nd ed, Cambridge University Press, Cambridge, 1944.

[6] F.W.J. Olver, Asymptotics and special functions, Academic Press, New York, 1997.

---

### ۳- کلمات کلیدی:

Bessel functions, Lipschitz-Hankel integrals, Associated Legendre function, Integral transforms.

---

### توضیحات:

- طرح بنیادی، پژوهشی است که عمدتاً در جهت گسترش مرزهای دانش بدون در نظر گرفتن استفاده عملی خاص برای کاربرد آن انجام می‌گیرد. اگرچه ممکن است این کاربرد در آینده تعریف شود.

- طرح کاربردی، پژوهشی است که استفاده عملی خاص برای نتایج حاصل از آن در نظر گرفته می‌شود و غالباً جنبه تجربی دارد.

### ۴- سایر توضیحات لازم:

۴-۱- دلایل ضرورت و توجیه انجام طرح: تحلیل و بررسی کردن جواب مسائل فیزیکی همواره مورد بحث و تفکر بسیاری از محققین بوده است. ارائه دادن نمایش‌های انتگرالی می‌تواند به بررسی و مطالعه ویژگی جواب‌های این گونه مسائل کمک قابل ملاحظه‌ای کند. بنابراین با توجه به اهمیت این موضوع، پایه و اساس کار تحقیقاتی ما ارائه انواع مختلف نمایش‌های انتگرالی است.

۲-۴- نتایج طرح پاسخگوی کدامیک از نیازهای علمی - صنعتی جامعه می‌باشد؟ طرح این مساله و روش حل آن در فیزیک، برق و مکانیک کاربرد فراوان دارد. برای نشان دادن جواب تحلیلی و دقیق معادلاتی که پدیده‌های فیزیکی را توصیف می‌کنند، از نمایش‌های انتگرالی استفاده می‌شود. بنابراین، مطرح کردن این روش حل می‌تواند کمک فراوانی به حل این قبیل مسائل در آینده نماید.

۳-۴- چه مؤسسه‌ای می‌تواند از نتایج طرح استفاده نمایند؟ (در صورت نیاز توضیح دهید) پژوهشکده‌های فیزیک، برق و مکانیک که به بررسی پدیده‌های طبیعی و فیزیکی می‌پردازند، می‌توانند از نتایج طرح استفاده نمایند.

۴-۴- سابقه علمی طرح و پژوهش‌های انجام شده با ذکر مأخذ به ویژه در ایران؟ یافتن فرمول‌ها واتحادهای توابع لژاندر وابسته و نیز توابع چنبره‌ای برحسب انتگرال‌های لپشیتز-هنکل به ندرت مورد توجه و بررسی قرار گرفته است و فقط نمایش‌های انتگرالی مقدماتی و بسیار اندکی برای این دسته از توابع در نظر گرفته شده است. از جمله کارهای علمی انجام شده برای نمایش دادن این توابع برحسب انتگرال‌های لپشیتز-هنکل می‌توان به منابع [1-3] رجوع کرد.

۵-۴- آیا پیشنهاد طرح پژوهشی حاضر ارتباطی با پایان نامه های تحصیلات تکمیلی کارشناسی ارشد/ دکتری که با راهنمایی جنابعالی انجام پذیرفته / در حال انجام است دارد؟ بلی  خیر

در صورت مثبت بودن پاسخ، ضمن ذکر عنوان پایان نامه های مربوطه لطفاً میزان انطباق را مشخص فرمائید.

۵- زمان بندی

مدت زمان لازم برای اجرای طرح (به ماه): ۷ ماه تاریخ شروع: تاریخ خاتمه: مدت زمان: جدول مراحل اجرای پروژه و پیش بینی زمان هر مرحله:

ملاحظات*												جدول زمانی به ماه																		شرح مختصر مراحل									
۳۶	۳۵	۳۴	۳۳	۳۲	۳۱	۳۰	۲۹	۲۸	۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱	۲۰	۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱				
																																						فراهم کردن مطالب اولیه	۱
																																						به دست آوردن شرایط و روابط خاص برای برقراری نتایج مورد نظر	۲
																																						نتیجه گیری نهایی	۳
																																						جمع آوری کارهای انجام شده و نوشتن طرح جمع	۴

توضیحات:

\* - برای شرایط خاص دلایل توجیهی باید ذکر شود.

۶- برای این طرح از سازمانهای دیگر نیز درخواست اعتبار شده است؟  بلی  خیر  
 در صورت مثبت بودن جواب لطفاً نام سازمان، نوع و میزان همکاری را مرقوم فرمایند؟

۷- هزینه پرسنلی پیش بینی شده با ذکر مشخصات کامل، میزان اشتغال و حق الزحمه:

نوع مسئولیت	میزان ساعت کار	حق التحقیق* و حق الزحمه به ساعت	جمع کل
مجری مسئول	۳۰۰	ده میلیون ریال	ده میلیون ریال
سایر مجریان			
سایر مجریان			
سایر همکاران	۳۰۰	ده میلیون ریال	ده میلیون ریال
سایر همکاران			
سایر همکاران			
جمع	۶۰۰	بیست میلیون ریال	بیست میلیون ریال

توضیحات:

\*- بر اساس حداکثر تا میزان مقرر در آئین نامه مصوب هیأت وزیران مورد عمل در دانشگاه و مؤسسات آموزش عالی محاسبه و پرداخت خواهد شد.



۸- فهرست وسائل و مواد مورد نیاز طرح که می‌باید از اعتبار طرح از داخل یا خارج کشور خریداری شود:

نام دستگاه/ مواد	شرکت دارنده و یا فروشنده	کشور سازنده	مصرفی یا غیر مصرفی	آیا در ایران موجود است	تعداد/مقدار	قیمت ریال یا ارز	قیمت کل ریال یا ارز	در چه مرحله از طرح مورد نیاز است؟
-	-	-	-	-	-	-	-	-
جمع هزینه‌های وسایل و مواد		به ریال						
جمع هزینه‌های وسایل و مواد		به دلار						

توضیحات:

- در صورتی که این مواد و یا دستگاه در ایران موجود باشد دلایل انتخاب نوع خارجی را ذکر نمایید.

- در صورتی که مواد و یا دستگاهها در دانشکده ها و یا مراکز تحقیقاتی دانشگاه جهت بهره‌گیری در دسترس باشد، دلایل خرید آنها مشخص کنید.

۱۰ - پیش بینی هزینه مسافرت داخل (در صورت لزوم)

مقصد	تعداد مسافرت در مدت اجرای طرح و منظور آن	نوع وسیله نقلیه	تعداد افراد	هزینه به ریال
-	-	-	-	-
جمع هزینه‌های مسافرت				

۱۱ - هزینه‌های دیگر مربوط به طرح

ریال	۱۱-۱ - هزینه‌های چاپ و تکثیر
ریال	۱۱-۲ - هزینه‌های تهیه نشریات و کتب لازم
ریال	۱۱-۳ - سایر هزینه‌ها (لطفاً نام ببرید) پیش بینی نشده
ریال	جمع هزینه‌های دیگر

۱۲ - کل اعتبار طرح

جمع هزینه‌ها	ریال	ارز
جمع هزینه‌های پرسنلی		
جمع هزینه‌های وسایل و مواد		
جمع هزینه‌های مسافرت		
جمع هزینه‌های دیگر		
جمع هزینه‌های سالانه		
جمع کل هزینه‌های طرح ریال	ارزی	دلار
	ریالی	ریال

مبلغی که از منابع دیگر کمک خواهد شد و نحوه مصرف آن:

نام و امضاء معری مسئول طرح: علیرضا انصاری



امضاء

تاریخ: ۹۹/۰۴/۲۳

نام و امضاء همکار طرح: شیوا اسحاقی



تاریخ: ۹۹/۰۴/۲۳

امضاء

---