ارتعاشات آزاد غیرخطی عرضی-پیچشی تیرهای چرخان با در نظر گرفتن نیروی کریولیس

هادی آروین بروجنی*

استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

چکیده

در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی عرضی-پیچشی تیرهای چرخان پرداخته می‌شود. معادلات ارائه شده بر مبنای فرمولاسیون دقیق هندسی بوده که بر اساس تئوری کوزرات برای میله ها استخراج گردیده‌اند. با صرفنظر از اثر تغییرشکل برشی، دو معادله عرضی و پیچشی برای تیرهای مستطیلی متقارن به‌دست می‌آید. این معادلات با یکدیگر کوپل بوده و دارای شرط‌های مرزی غیرهمگن نیز می‌باشند. با اعمال روش مستقیم مقیاس‌های چندگانه رابطه ضریب غیرخطی مؤثر در فرکانس‌های طبیعی غیرخطی استخراج می‌گردد. سپس با مقایسه نتایج فرکانس غیرخطی با نتایج موجود در مقالات دیگر نتایج حاضر تایید می‌گردند. پس از آن به بررسی تأثیر سرعت چرخش بر علامت و مقدار ضریب غیرخطی مؤثر در فرکانس‌های طبیعی پرداخته می‌شود. علامت ضریب غیرخطی مؤثر نوع نرم‌شوندگی و سخت‌شوندگی فرکانس طبیعی غیرخطی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌گردد که با در نظر نگرفتن کوپل پیچش و خمش ناشی از نیروی کریولیس با وجود آنکه در مودهای فرد حرکت عرضی علامت ضریب غیرخطی مؤثر یکسانی پیش‌بینی می‌گردد اما مقدار ضریب غیرخطی مؤثر متفاوت حاصل می‌شود. از طرف دیگر در مودهای زوج عرضی و در سرعت بالا علاوه بر مقدار ضریب غیرخطی مؤثر، علامت ضریب غیرخطی مؤثر نیز متفاوت پیش‌بینی می‌گردد.

کلمات کلیدی: تیرهای چرخان، فرمولاسیون دقیق هندسی، نیروی کریولیس، ضریب غیرخطی مؤثر، روش مقیاس‌های چندگانه.

۱- مقدمه

تیرهای چرخان در بسیاری از صنایع دیده می‌شوند که از جمله آنها می‌توان به صنایع هوافضا، نیروگاه‌های بادی، آبی و گازی اشاره نمود. از طرفی بدلیل حساس بودن و هزینه‌های بالای سازه‌های مرتبط، مدل نمودن دقیق آنها و پیش‌بینی دینامیک و ارتعاش آنها از مسائل بسیار مهم برای طراحان می‌باشد. لذا در این مقاله به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی عرضی-پیچشی آنها پرداخته می‌شود.

هاجز و داول [۱] در سال ۱۹۷۴ فرمولاسیون نسبتاً دقیقی برای تیر چرخان ایزوتروپ غیرمتقارن برای ارتعاش با دامنه‌های متوسط ارائه نمودند. کرسپو داسیلوا و هاجز [۲] در سال ۱۹۸۶ معادلات حرکت تیری چرخان با پیش‌پیچش اولیه متغیر در طول تیر را با استفاده از اصل همیلتون استخراج نمودند. ایشان [۳] در همین سال به تحلیل تأثیر ترم‌های غیرخطی متفاوت شامل غیرخطی هندسی و ترم‌های غیرخطی ناشی از نیروهای آیرودینامیک بر ناپایداری حرکت‌های جفت‌شده عرضی، عرضی خارج از صفحه و پیچشی پرداختند. هاجز [۴] در سال ۱۹۹۰ با در نظر گرفتن تابیدگی و استفاده از زوایای رودریگز فرمولاسیون دقیقی برای تحلیل دینامیکی تیرهای چرخان آنیزوتروپ پیش-پیچیده شده ارائه نمود. او [۵] در سال ۱۹۹۵ تأثیر ویژگی‌های خاصی از شرایط مرزی و نیروهای مرکزگرا را بر روی ارتعاشات آزاد تیرهای تیموشنکوی چرخان روشن نمود. آوراموف [۶] در سال ۲۰۰۸ معادلات حرکت تیرهای نازک چرخان با سطح مقطع متغیر و دارای خروج از مرکزی بین مرکز سطح و مرکز جرم را با استفاده از اصل همیلتون استخراج نمود. والورده و گارسیا-والجو [۷] در سال ۲۰۰۹ با بکارگیری فرمولاسیون مختصاتی گرهی مطلق در مقابل روش فرمولاسیون دقیق بر مبنای تئوری کوزرات برای میله‌ها به مقایسه نتایج این دو روش برای پایداری تیرهای چرخان پرداختند. لاکاربونارا و همکاران [۸] در سال ۲۰۱۲ با استفاده از روش فرمولاسیون دقیق هندسی معادلات حاکم بر پره‌های چرخان با پیش‌پیچش اولیه و متغیر در طول پره را بدست آوردند. آروین و همکاران [۹] در همان سال با استفاده از فرمولاسیون دقیق هندسی به‌دست آمده در مرجع [۸] با صرفنظر از نیروی کریولیس، معادلات دقیق عرضی و طولی را استخراج نموده و سپس با استفاده از روش مستقیم مقیاس‌های چندگانه به بررسی علامت ضریب غیرخطی مؤثر مودهای متفاوت عرضی و تأثیر سرعت چرخش بر آن پرداختند. آروین و لاکاربونارا [۱۰] در سال ۲۰۱۴ با ارائه روابط دقیق ساختاری برای کامپوزیت‌ها، فرمولاسیون دقیق ارائه شده در مرجع [۸] را برای پره‌های چرخان کامپوزیتی توسعه دادند. سپس مطالعه مشابه مرجع [۹] را برای بررسی تأثیر سرعت چرخش بر علامت ضریب غیرخطی مؤثر انجام دادند. تورهان و بولت [۱۱] در سال ۲۰۰۹ با استفاده از روش لینستد-پوآنکاره اثر سرعت چرخش بر پاسخ غیرخطی شامل تغییر علامت ضریب غیرخطی مؤثر از سخت‌شونده به نرم‌شونده و برعکس و پدیده‌های پرش هارمونیک و سوپر هارمونیک را بررسی نمودند. آروین و بختیاری‌نژاد [۱۲] در سال ۲۰۱۱ روش مقیاس‌های چندگانه را بر معادلات گسسته‌سازی شده تیر چرخان اویلر-برنولی اعمال و مودهای نرمال غیرخطی را استخراج نمودند.

پس از بررسی پژوهش‌های انجام شده مشاهده می‌گردد که در مطالعات انجام شده تا کنون در بررسی ارتعاشات غیرخطی به بررسی حرکت جفت شده خمشی-پیچشی که به‌دلیل نیروی کریولیس ایجاد می‌گردد پرداخته نشده است. لذا در این مقاله با در نظر گرفتن نیروی کریولیس به بررسی مقدار و علامت ضریب غیرخطی مؤثر (که نشان دهنده نرم‌شوندگی و یا سخت‌شوندگی فرکانس طبیعی غیرخطی مورد نظر است) تیرهای چرخان کامپوزیتی با لایه‌چینی متقارن و سطح مقطع مستطیلی پرداخته می‌شود. در ابتدا با استفاده از روابط ارائه شده در مرجع [۸] معادلات دقیق تیرها بازنویسی

* آدرس ایمیل نویسنده مسؤول مکاتبات: hadi.arvin@sku.ac.ir

می‌گردد. سپس با صرف‌نظر از تغییرشکل برشی معادلات عرضی و پیچشی استخراج می‌شوند. پس از بی‌بعدسازی معادلات حرکت با استفاده از روش مستقیم مقیاس‌های چندگانه رابطه ضریب غیرخطی مؤثر استخراج می‌گردد. در قسمت ارائه نتایج عددی در پی اعتبارسنجی نتایج حاضر به بررسی تأثیر سرعت چرخش بر علامت ضریب غیرخطی مؤثر مودهای اول تا سوم عرضی و اول و دوم پیچشی پرداخته می‌شود.

۲- معادلات حرکت

شماتیکی از یک تیر چرخان چند لایه با طول L، عرض b و ضخامت h در شکل ۱-الف نشان داده شده است. این تیر در حال چرخش با سرعت ثابت ω_R حول محور $\mathbf{i}_1$ می‌باشد. در این مقاله حرکت عرضی-پیچشی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. s متغیر مکان مرکز جرم سطح مقطع دلخواه می‌باشد که از مرکز جرم سطح مقطع متصل به روتور اندازه‌گیری می‌شود. موقعیت مرکز جرم سطح مقطع متصل به روتور نسبت به مبدا O توسط رابطه $\mathbf{d}=d_2\mathbf{e}_2+d_3\mathbf{e}_3$ مشخص می‌گردد که با در نظر گرفتن هم‌سطحی بین مبدا O و مرکز سطح مقطع متصل به روتور $d_2=0$ خواهد بود. $\mathbf{u}(s,t)$، بردار تغییر مکان مرکز جرم در نظر گرفته شده در موقعیت s می‌باشد و برابر $\mathbf{u}(s,t)=u_3^0(s)\mathbf{e}_3+u_1(s,t)\mathbf{e}_1$ است. شایان ذکر است که $u_3^0(s)$ تغییر شکل طولی ناشی از نیروی گریز از مرکز حاصل از چرخش و $u_1(s,t)$ تغییر شکل عرضی دینامیکی است. $\mathbf{r}(s,t)$ بردار مکان مرکز جرم سطح مقطع در نظر گرفته در موقعیت s است و مطابق شکل ۱-الف توسط رابطه $\mathbf{r}(s,t)=s\mathbf{e}_3+\mathbf{u}(s,t)$ حاصل می‌شود. جهت فرمولاسیون دقیق معادلات دو دستگاه مختصات چرخان که یکی تنها دارای حرکت دوران تیر بوده و در مرکز جرم سطح مقطع متصل به روتور قرار دارد و بردارهای پایه آن با $\mathbf{e}_k$ نمایش داده می‌شود و دیگری در موقعیت s قرار دارد و جهت سطح مقطع جاری را نشان می‌دهد و بردارهای پایه آن با $\mathbf{b}_k$ نمایش داده می‌شود در نظر گرفته شده است. لذا جهت داشتن معادلات دقیق دو ماتریس انتقال متعامد در نظر گرفته می‌شود که به‌ترتیب از دستگاه مختصات چرخان $\mathbf{e}_k$ با چرخش حول محور $\mathbf{e}_2$ با زاویه $\theta_2(s,t)$ به دستگاه مختصات واسط $\mathbf{e}_k^{(1)}$ رفته (شکل ۱-ب) و سپس از دستگاه واسط با چرخش حول محور $\mathbf{e}_3^{(1)}$ با زاویه $\theta_3(s,t)$ به دستگاه مختصات نهایی در پیکره‌بندی جاری می‌رویم (شکل ۱-پ). ماتریس انتقال نهایی از دستگاه مختصات چرخان $\mathbf{e}_k$ به مختصات جاری $\mathbf{b}_k$ به‌صورت $\mathbf{b}_k=\mathbf{R}\cdot\mathbf{e}_k$ خواهد بود که $\mathbf{R}$ تانسور چرخش می‌باشد و در **پیوست الف** ارائه شده است. معادله‌های حرکت مشخص کننده حرکت‌های عرضی در امتداد محورهای $\mathbf{e}_1$، و خمشی حول محور $\mathbf{e}_2$ و حرکت پیچشی به‌ترتیب عبارتند از [۸]:

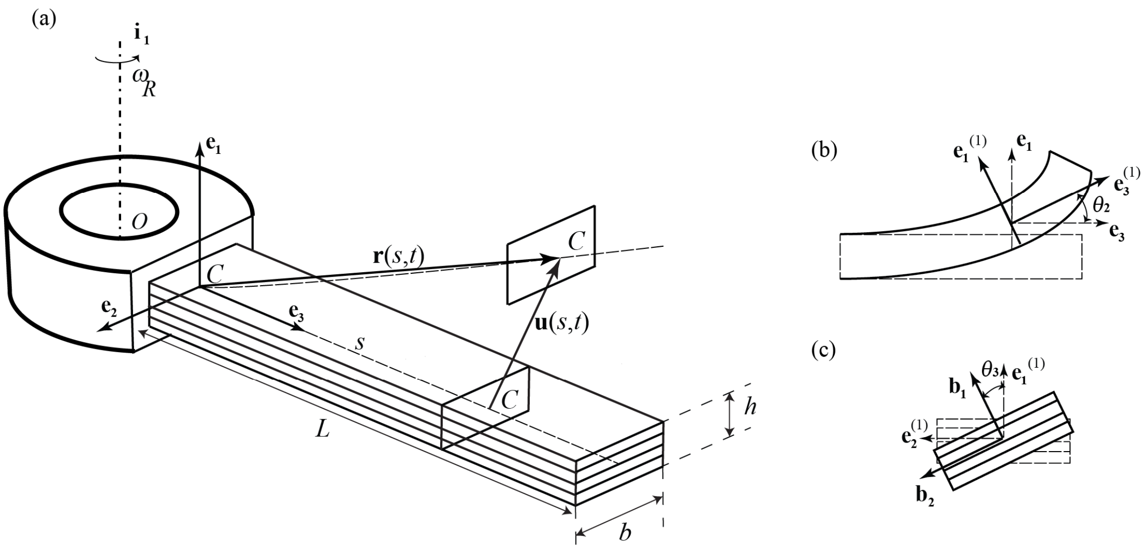

Fig. 1. (a)-Schematic of rotating composite beam, (b)-Interface coordinate system,(c)-Current coordinate system

شکل ۱: الف- شماتیک تیر کامپوزیتی چرخان، ب- دستگاه مختصات واسط، پ- دستگاه مختصات جاری

$$
\begin{aligned}
&[\partial_s Q_1+\breve{\mu}_2 N]R_{1,1}+[\breve{\mu}_3 Q_1-\breve{\mu}_1 N]R_{2,1}+[\partial_s N-\breve{\mu}_2 Q_1]R_{3,1}=\rho A\partial_{tt}u_1\\
&\partial_s M_2-\breve{\mu}_1 T+\breve{v}Q_1-\partial_s u_1 N^0 R_{2,2}=\rho J_{22}\partial_t\breve{\omega}_2-\rho J_{22}\breve{\omega}_1\breve{\omega}_3\\
&\partial_s T+\breve{\mu}_1 M_2-\partial_s u_1 N^0 R_{3,2}=\rho J_{33}\partial_t\breve{\omega}_3+(\rho J_{22}-\rho J_{11})\breve{\omega}_1\breve{\omega}_2
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

که در این رابطه $\breve{v}$ کشیدگی کلی می‌باشد که از رابطه $\breve{\mathbf{v}}*=\partial_s\mathbf{r}=\breve{v}\mathbf{b}_3+\eta_1\mathbf{b}_1$ [۱۳] به‌دست می‌آید که در آن η_1 تغییرشکل برشی در راستای محور $\mathbf{b}_1$ است. بدین ترتیب $\breve{v}=\sqrt{\left(\left(v^0\right)^2+(\partial_s u_1)^2\right)}$ و $\eta_1=\cos(\theta_3(s,t))\cos(\theta_2(s,t))\partial_s u_1-v^0\cos(\theta_3(s,t))\sin(\theta_2(s,t))$ خواهند شد که در آن $v^0\equiv\frac{1}{v_{inv}^0}=1+u_3^{0\prime}(s)$ کشیدگی ناشی از پیش‌تنش بوجود آمده از نیروی گریز از مرکز می‌باشد. $\breve{\boldsymbol{\mu}}$ و $\breve{\boldsymbol{\omega}}$ به‌ترتیب بردار انحنا و بردار سرعت چرخشی

کلی می‌باشند که به‌ترتیب با مشتق‌گیری نسبت به مکان و زمان از بردارهای پایه جاری به‌صورت $\partial_s \mathbf{b}_k = \breve{\boldsymbol{\mu}} \times \mathbf{b}_k$ [۱۳] و $\partial_t \mathbf{b}_k = \breve{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{b}_k$ [۱۳] به‌دست می‌آیند و در **پیوست الف** ارائه شده‌اند. Q_1 نیروی برشی در امتداد محور $\mathbf{b}_1$ و $N = EA(\nu - 1)$ نیروی محوری در امتداد محور $\mathbf{b}_3$ می‌باشد و در آن EA سفتی طولی است. شایان ذکر است که ν کشیدگی پیکره‌بندی کنونی نسبت به کشیدگی ناشی از پیش‌تنش می‌باشد که در پایان این بخش طریقه محاسبه آن توضیح داده می‌شود. $M_2 = EJ_{22}\breve{\mu}_2$ گشتاور خمشی حول محور $\mathbf{b}_2$ می‌باشد که در آن EJ_{22} سفتی خمشی متناظر است. $T = GJ_{33}\breve{\mu}_3$ پیچش حول محور $\mathbf{b}_3$ می‌باشد و در آن GJ_{33} سفتی پیچشی متناظر است. ρ چگالی تیر و ρA جرم بر واحد طول تیر می‌باشد؛ ρJ_{11}، ρJ_{22} و ρJ_{33} به‌ترتیب ممان اینرسی جرمی حول محورهای $\mathbf{b}_1$، $\mathbf{b}_2$ و $\mathbf{b}_3$ می‌باشند. ∂_s و ∂_t به‌ترتیب نشان دهنده مشتق پاره‌ای نسبت به متغیرهای مکان و زمان می‌باشند. N^0 نیز نیروی محوری ناشی از پیش‌تنش می‌باشد. برای تیرهای چرخان متقارن معادله و شرایط مرزی لازم جهت محاسبه نیروی محوری پیش‌تنش به‌صورت رابطه‌های (۲) و (۳) ساده می‌گردند [۸]:

$$N^{0\prime} + \rho A \omega_R^2 (d_3 + s + u_3^0) = 0 \tag{۲}$$

$$u_3^0(0) = 0, \quad N^0(L) = 0, \tag{۳}$$

که $(\bullet')$ نشان دهنده مشتق نسبت به متغیر مکان می‌باشد.

برای صرفنظر از تغییر شکل برشی، تغییرشکل برشی η_1 صفر قرار داده می‌شود. با برابر صفر قرار دادن η_1 و استفاده از رابطه بدیهی $\cos^2(\theta_2(s,t)) + \sin^2(\theta_2(s,t)) = 1$، $\sin(\theta_2(s,t)) = \frac{\partial_s u_1}{\breve{\nu}}$ ، $\cos(\theta_2(s,t)) = \frac{1/\nu_{inv}^0}{\breve{\nu}}$ و $\theta_2(s,t) = \arctan(\frac{\partial_s u_1}{1/\nu_{inv}^0})$ خواهند بود. حال Q_1 از معادله $_2$(1) استخراج و در معادله $_1$(1) جایگزین شده و با توجه به روابط به‌دست آمده برای $\theta_2(s,t)$ معادله حرکت عرضی به‌دست آید. بدین ترتیب معادلات حرکت به دو معادله عرضی و پیچشی کاهش می‌یابند. در تیرهای متقارن چرخان معادلات عرضی و پیچشی با یکدیگر در قسمت خطی وابسته می‌باشند. دلیل وابستگی خطی این معادلات نیروی کریولیس می‌باشد که در بسیاری از مقالات از آن صرفنظر می‌گردد. در این مقاله برای اولین بار به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی خمشی-پیچشی تیرهای چرخان به‌دلیل در نظر گرفتن اثر نیروی کریولیس پرداخته می‌شود.

برای تیر چرخان یکسرگیردار شرایط مرزی متناظر به‌صورت رابطه (۴) مشخص می‌گردند.

$$\begin{aligned} &u_1(0,t) = 0, \theta_2(0,t) = 0,\ \theta_3(0,t) = 0, \\ &Q_1(L,t) = 0, M_2(L,t) = 0, T(L,t) = 0, \end{aligned} \tag{۴}$$

لازم به ذکر است که در تیرهای چرخان متقارن با صرفنظر از تغییر شکل برشی نیروی محوری کلی از رابطه $\breve{N}\mathbf{b}_3 = N\mathbf{b}_3 + N^0\mathbf{e}_3$ به‌دست می‌آید که با توجه به رابطه انتقال بین بردارهای پایه $\breve{N}\mathbf{b}_3 = N\mathbf{b}_3 + N^0\mathbf{b}_3 R_{3,3}$ خواهد شد و بدین ترتیب $\nu = \breve{\nu} - (\nu^0 - 1)R_{3,3}$ خواهد بود.

۲-۱- فرم بدون بعد معادلات حرکت

معادلات حرکت با اعمال پارامترهای رابطه (۵) به فرم بی‌بعد تبدیل می‌گردند:

$$\hat{s} = s / L, \hat{t} = \omega_0 t, \hat{u}_1 = \frac{1}{L} u_1, \hat{\theta}_3 = \theta_3 \tag{۵}$$

که در این رابطه $\omega_0 = \sqrt{EJ_{22} / (\rho A L^4)}$ فرکانس مشخصه می‌باشد. حال به منظور ساده سازی معادلات علامت $(\hat{\bullet})$ از این معادلات حذف می‌گردد تا معادلات عرضی و پیچشی بدون بعد و شرایط مرزی متناظرشان در انتهای تیر به‌صورت رابطه‌های (۶) و (۷) ساده گردند:

$$\mathbf{I} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{L} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{i}_0^{(3)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{i}_1^{(3)}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{i}_2^{(3)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \ddot{\mathbf{u}}) + \mathbf{n}^{(3)}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0, \tag{۶}$$

$$\mathbf{I}_{BC} \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{G}_{BC} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{L}_{BC} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{n}_{BC}^{(3)} = 0, \tag{۷}$$

که در این رابطه‌ها $\mathbf{u}(s,t) = [u_1(s,t), \theta_3(s,t)]^{\mathrm{T}}$ می‌باشد. $\mathbf{I}$، $\mathbf{G}$ و $\mathbf{L}$ نیز به‌ترتیب اپراتورهای اینرسی، ژیروسکوپی و سفتی می‌باشند و در **پیوست ب** ارائه شده‌اند. $\mathbf{i}_0^{(3)}$، $\mathbf{i}_1^{(3)}$ و $\mathbf{i}_2^{(3)}$ ترم‌های غیرخطی اینرسی درجه سوم، و $\mathbf{n}^{(3)}$ ترم غیرخطی سفتی درجه سوم می‌باشند که در **پیوست پ** نمایش داده شده‌اند. لازم به ذکر است که به‌ترتیب، از زیرنوشت‌های ۱ و ۶ جهت مشخص نمودن مولفه‌های معادلات عرضی و پیچشی در این مقاله استفاده گردیده است. $\mathbf{n}_{BC}^{(3)}$ نیز، ترم غیرخطی مرتبه سوم شرایط مرزی می‌باشد که در **پیوست پ** ارائه شده است. در معادلات مذکور

$\lambda = \omega_R/\omega_0$ ، $\alpha_{i2} = EAL^2/EJ_{ii}$ ، و $GJ_{33} = EJ_{33}/2(1+\bar{v})$ می‌باشند که $\bar{v}$ ضریب پواسون است.

فرم بدون بعد معادله نیروی محوری ناشی از پیش‌تنش (رابطه (۲)) و شرایط مرزی متناظرش (رابطه (۳)) نیز به‌صورت رابطه‌های (۸) و (۹) خواهد بود:

$$\alpha_{22}u_3^{0''}(s) + \lambda^2(r + s + u_3^0(s)) = 0 \tag{۸}$$

$$u_3^0(0) = 0, \quad N^0(1) = 0, \tag{۹}$$

حل این معادله منجر به رابطه (۱۰) می‌گردد:

$$u_3^0(s) = \sin(\lambda_a s)\frac{(\sin(\lambda_a))\lambda r + \sqrt{\alpha_{22}}}{(\cos(\lambda_a))\lambda} + \cos(\lambda_a s)r - s - r \tag{۱۰}$$

که در این رابطه $r = d_3/L$ و $\lambda_a = \lambda/\sqrt{\alpha_{22}}$ است.

۳- روش مقیاس‌های چندگانه

پس از استخراج معادلات بدون بعد، در این بخش روش مقیاس‌های چندگانه مستقیم جهت محاسبه فرکانس‌های طبیعی غیرخطی به‌کار گرفته می‌شود. ابتدا فرم مرتبه‌بندی شده تغییرمکان عرضی و پیچشی به‌صورت رابطه (۱۱) در نظر گرفته می‌شود [۱۳]:

$$\begin{aligned} u_1(s,T_0,T_1,T_2) &= \varepsilon u_{1,0}(s,T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^2 u_{1,1}(s,T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^3 u_{1,2}(s,T_0,T_1,T_2) + O(\varepsilon^4) \\ \theta_3(s,T_0,T_1,T_2) &= \varepsilon\theta_{3,0}(s,T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^2\theta_{3,1}(s,T_0,T_1,T_2) + \varepsilon^3\theta_{3,2}(s,T_0,T_1,T_2) + O(\varepsilon^4) \end{aligned} \tag{۱۱}$$

که در این رابطه‌ها ε پارامتر معمول مورد استفاده در روش‌های اغتشاشات است [۱۴].

با جایگذاری فرم مرتبه‌بندی شده تغییرمکان عرضی و پیچشی در معادلات بدون بعد عرضی و پیچشی و شرایط مرزی مرتبطشان و استفاده از مشتقات مرتبه اول و دوم زمانی روش مقیاس‌های چندگانه به‌صورت $d/dt = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + O(\varepsilon^3)$ و $d^2/dt^2 = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2(2D_0D_2 + D_1^2) + O(\varepsilon^3)$ معادلات مرتبه بندی شده مرتبه اول و شرایط مرزی مربوط به آنها به‌صورت رابطه‌های (۱۲) و (۱۳) استخراج می‌گردند:

$$\begin{aligned} &O(\varepsilon^1): \\ &-I_{11}D_0^2[u_{1,0}] + G_{16}D_0[\theta_{3,0}] + L_{11}[u_{1,0}] = 0, \\ &-I_{66}D_0^2[\theta_{3,0}] + G_{61}D_0[u_{1,0}] + L_{66}[\theta_{3,0}] = 0, \end{aligned} \tag{۱۲}$$

$$\begin{aligned} &-I_{BC,11}D_0^2[u_{1,0}] + G_{BC,11}D_0[\theta_{3,0}] + L_{BC,11}[u_{1,0}] = 0, \\ &-I_{BC,12}D_0^2[u_{1,0}] + G_{BC,12}D_0[\theta_{3,0}] + L_{BC,12}[u_{1,0}] = 0, \\ &-I_{BC,6}D_0^2[\theta_{3,0}] + G_{BC,6}D_0[u_{1,0}] + L_{BC,6}[\theta_{3,0}] = 0, \end{aligned} \tag{۱۳}$$

لازم به ذکر است زیرنوشت‌های $BC,11$ ، $BC,12$ و $BC,6$ به‌ترتیب معرف شرایط مرزی $Q_1(1,t) = 0$ ، $M_2(1,t) = 0$ و $T(1,t) = 0$ می‌باشند.

معادلات مرتبه بندی شده مرتبه دوم و شرایط مرزی مربوط به آنها نیز به‌صورت رابطه‌های (۱۴) و (۱۵) استخراج می‌گردند:

$$\begin{aligned} &O(\varepsilon^2): \\ &-I_{11}D_0^2[u_{1,1}] + G_{16}D_0[\theta_{3,1}] + L_{11}[u_{1,1}] = RHS\,(O_{Eq1}^{(2)}), \\ &-I_{66}D_0^2[\theta_{3,1}] + G_{61}D_0[u_{1,1}] + L_{66}[\theta_{3,1}] = RHS\,(O_{Eq6}^{(2)}), \end{aligned} \tag{۱۴}$$

$$
\begin{aligned}
&-I_{BC,11}D_0^2[u_{1,1}]+G_{BC,11}D_0[\theta_{3,1}]+L_{BC,11}[u_{1,1}]=RHS\,(O_{BC11}^{(2)}),\\
&-I_{BC,12}D_0^2[u_{1,1}]+G_{BC,12}D_0[\theta_{3,1}]+L_{BC,12}[u_{1,1}]=0,\\
&-I_{BC,6}D_0^2[\theta_{3,1}]+G_{BC,6}D_0[u_{1,1}]+L_{BC,6}[\theta_{3,1}]=0,
\end{aligned}
\tag{۱۵}
$$

که $RHS\,(O_{Eq1}^{(2)})$ ، $RHS\,(O_{Eq6}^{(2)})$ ، و $RHS\,(O_{BC11}^{(2)})$ در **پیوست ت** نمایش داده شده‌اند.

در آخر معادلات مرتبه‌بندی شده مرتبه سوم و شرایط مرزی متناظر نیز به‌صورت رابطه‌های (۱۶) و (۱۷) خواهند بود:

$$
\begin{aligned}
&O(\varepsilon^3):\\
&-I_{11}D_0^2[u_{1,2}]+G_{16}D_0[\theta_{3,2}]+L_{11}[u_{1,2}]=RHS\,(O_{Eq1}^{(3)}),\\
&-I_{66}D_0^2[\theta_{3,2}]+G_{61}D_0[u_{1,2}]+L_{66}[\theta_{3,2}]=RHS\,(O_{Eq6}^{(3)}),
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

$$
\begin{aligned}
&-I_{BC,11}D_0^2[u_{1,2}]+G_{BC,11}D_0[\theta_{3,2}]+L_{BC,11}[u_{1,2}]=RHS\,(O_{BC11}^{(3)}),\\
&-I_{BC,12}D_0^2[u_{1,2}]+G_{BC,12}D_0[\theta_{3,2}]+L_{BC,12}[u_{1,2}]=RHS\,(O_{BC12}^{(3)}),\\
&-I_{BC,6}D_0^2[\theta_{3,2}]+G_{BC,6}D_0[u_{1,2}]+L_{BC,6}[\theta_{3,2}]=0,
\end{aligned}
\tag{۱۷}
$$

که $RHS\,(O_{Eq1}^{(3)})$ ، $RHS\,(O_{Eq6}^{(3)})$ ، $RHS\,(O_{BC11}^{(3)})$ ، و $RHS\,(O_{BC12}^{(3)})$ در **پیوست ت** ارائه شده‌اند.

حل معادلات مرتبه اول یعنی معادلات (۱۲) و شرایط مرزی مربوط به آن‌ها، همان حل ارتعاشات خطی سیستم بوده که در اینجا با استفاده از روش گلرکین [۱۵] محاسبه می‌گردد و به‌صورت رابطه (۱۸) قابل بیان است:

$$
\begin{aligned}
&u_{1,0}=\psi_{1,k}(s)[A_k(T_1,T_2)e^{i\omega_{1,k}T_0}+CC]\\
&\theta_{3,0}=\psi_{6,k}(s)[A_k(T_1,T_2)e^{i\omega_{1,k}T_0}+CC]
\end{aligned}
\tag{۱۸}
$$

که در این رابطه‌ها $\psi_{1,k}$ و $\psi_{6,k}$ به‌ترتیب مودهای خطی عرضی و پیچشی و $\omega_{1,k}$ فرکانس خطی عرضی-پیچشی k ام می‌باشد. $A_k(T_1,T_2)$ دامنه مختلط مود k ام، CC نمایشگر مزدوج مختلط ترم‌های پیش از خود و i موهومی یکه می‌باشد.

جهت حل معادلات مرتبه دوم ابتدا حل مرتبه اول یعنی $u_{1,0}$ و $\theta_{3,0}$ از رابطه‌های (۱۸) در معادلات (۱۴) و شرایط مرزی مربوطه جایگزین می‌گردد. برای داشتن پاسخ پریودیک در مرتبه دوم باید ترم سکولار این دسته معادلات حذف گردد. بدین ترتیب به‌دلیل داشتن شرایط مرزی غیر همگن و داشتن معادلات کوپل با انجام فرآیندی مشابه مرجع [۱۶] که بر مبنای تعامد مودها می‌باشد ترم سکولار به‌صورت رابطه (۱۹) بدست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1[\psi_{1,k}\cdot C_{1,1}(s,T_1,T_2)+\psi_{6,k}\cdot C_{1,6}(s,T_1,T_2)]ds-C_{1,BC11}(T_1,T_2)\cdot\psi_{1,k}\big|_{s=1}-C_{1,BC6}(T_1,T_2)\cdot\psi_{6,k}\big|_{s=1}\\
&\quad -C_{1,BC12}(T_1,T_2)\cdot\psi_{1,k}'\big|_{s=1}=0
\end{aligned}
\tag{۱۹}
$$

که در این رابطه $C_{1,1}(s,T_1,T_2)$ و $C_{1,6}(s,T_1,T_2)$ به‌ترتیب ضریب $e^{i\omega_{1,k}T_0}$ در سمت راست معادله $(14)_1$ و $(14)_2$ می‌باشند. $C_{1,BC11}(T_1,T_2)$ ، $C_{1,BC12}(T_1,T_2)$ و $C_{1,BC6}(T_1,T_2)$ نیز به‌ترتیب ضریب $e^{i\omega_{1,k}T_0}$ در سمت راست معادلات $(15)_1$ ، $(15)_2$ و $(15)_3$ می‌باشند. بدین ترتیب ترم سکولار پس از ساده سازی به‌صورت رابطه (۲۰) ساده می‌گردد:

$$
Secular\ Order\quad \varepsilon^2:=[2i\omega_{1,k}\xi_{1,1,1}+\frac{2(-2i\omega_{1,k}\xi_{1,1,2}+\lambda\xi_{1,6})}{\alpha_{22}}+\lambda\frac{\alpha_{12}-\alpha_{22}}{\alpha_{22}\alpha_{12}}\xi_{6,1}+\frac{2i\omega_{1,k}\xi_{6,6}+\lambda\xi_{6,1}}{\alpha_{32}}-iC_2-C_1]D_1A_k(T_1,T_2)
\tag{۲۰}
$$

که در این رابطه $C_1=-(2(-\psi_{6,k}|_{s=1}\lambda))\psi_{1,k}|_{s=1}/\alpha_{22}$ ، $C_2=-2(\psi_{1,k}'|_{s=1})\omega_{1,k}\psi_{1,k}|_{s=1}/\alpha_{22}$ و $\xi_{i,j,k}$ ها در **پیوست ث** داده شده اند. طبق رابطه (۲۰) حذف ترم سکولار نیازمند صفر بودن $D_1A_k(T_1,T_2)=0$ می‌باشد و یا به عبارت دیگر $A_k(T_1,T_2):=A_k(T_2)$ خواهد بود. بدین صورت سمت راست کلیه معادلات مرتبه دوم و شرایط مرزی آنها متحد صفر شده و بنابراین حل مرتبه دوم منجر به رابطه‌های (۲۱) خواهد گردید:

$$u_{1,1}(s,T_0,T_1,T_2) := 0$$
$$\theta_{3,1}(s,T_0,T_1,T_2) := 0 \qquad (۲۱)$$

با وارد نمودن رابطه‌های (۱۸) و (۲۱) در معادلات مرتبه سوم، رابطه‌های (۱۶)، و شرایط مرزی مرتبط، رابطه‌های (۱۷)، و انجام فرآیند مشابه مرتبه دوم، ترم سکولار مرتبه سوم به‌صورت رابطه (۲۲) ظاهر خواهد گردید.

$$Secular\ Order \quad \varepsilon^3 := (2i\,\omega_{1,k}\Gamma_{1,k,i} + \lambda\Gamma_{1,k,R})A_k{}'(T_2) + (i\,\Gamma_{2,k,i}\,\lambda\omega_{1,k} + \Gamma_{2,k,R})\bar{A}_k(T_2)A_k(T_2)^2 \qquad (۲۲)$$

که در این رابطه Γ ها در **پیوست ج** داده شده‌اند. χ و C های استفاده شده در تعریف Γ ها نیز، به‌ترتیب، در **پیوست**‌های **ث** و **چ** ارائه شده‌اند. حل رابطه (۲۲) منجر به معادله مدولاسیون دامنه مختلط یعنی $A_k{}'(T_2)$ خواهد گردید:

$$A_k{}'(T_2) = (i\,\gamma_{1,k,i} + \gamma_{1,k,R})\bar{A}_k(T_2)A_k(T_2)^2 \qquad (۲۳)$$

که $\gamma_{1,k,i}$ و $\gamma_{1,k,R}$ در **پیوست ج** ارائه شده‌اند.

حال با جایگزینی فرم قطبی دامنه kام یعنی $A_k(T_2) = (1/2)a_k(T_2)e^{i\beta_k(T_2)}$ در رابطه مدولاسوین دامنه مختلط و جداسازی قسمت حقیقی و موهومی معادله بدست آمده و حل این دو معادله جهت دستیابی به معادلات مدولاسیون دامنه حقیقی و فاز، یعنی $a_k{}'(T_2)$ و $\beta_k{}'(T_2)$ ، معادلات (۲۴) به‌دست خواهند آمد:

$$a_k{}'(T_2) = \frac{1}{4}a_k(T_2)^3\gamma_{1,k,R}$$
$$a_k(T_2)\beta_k{}'(T_2) = \frac{1}{4}a_k(T_2)^3\gamma_{1,k,i} \qquad (۲۴)$$

طبق تحلیل عددی انجام گرفته در بخش نتایج که در شکل ۵-(ج) نمایش داده شده، مشاهده می‌گردد که مقدار $\gamma_{1,k,R}$ در مقایسه با مقدار $\gamma_{1,k,i}$ بسیار ناچیز بوده و قابل صرف‌نظر است و بدین ترتیب $\gamma_{1,k,R} \approx 0$ خواهد بود. لذا حل دو معادله منجر به رابطه‌های (۲۵) خواهد گردید:

$$a_k(T_2) = Constant = a_k^0$$
$$\beta_k(T_2) = \frac{1}{4}a_k^{0\,2}\gamma_{1,k,i}T_2 + \beta_k^0 \qquad (۲۵)$$

که a_k^0 و β_k^0 دامنه و فاز اولیه بوده و با استفاده از شرایط اولیه بدست می‌آیند.

حال با جایگذاری معادلات (۱۸) و (۲۱) در رابطه‌های (۱۱) و با در نظر گرفتن $\varepsilon = 1$ فرم مرتبه دوم تغییر مکان عرضی و پیچشی به‌صورت رابطه‌های (۲۶) ساده می‌گردد:

$$u_1 = a_k^0\psi_{1,k}(s)\cos(\omega_{1,k}^{NL}t + \beta_k^0) + O(\varepsilon^3)$$
$$\theta_3 = a_k^0\psi_{6,k}(s)\cos(\omega_{1,k}^{NL}t + \beta_k^0) + O(\varepsilon^3) \qquad (۲۶)$$

که در این رابطه $\omega_{1,k}^{NL}$ فرکانس غیرخطی kام است و دارای رابطه $\omega_{1,k}^{NL} = \omega_{1,k} + 1/4a_k^{0\,2}\gamma_{1,k,i}$ است. همان‌گونه که در این رابطه مشخص است علامت $\gamma_{1,k,i}$ نرم شوندگی و سخت شوندگی فرکانس طبیعی غیرخطی kام را نشان می‌دهد و به آن ضریب غیرخطی مؤثر مود kام گفته می‌شود.

۴- نتایج عددی

ابتدا جهت اعتبارسنجی نتایج حاضر تیر چرخان در نظر گرفته شده مطابق با مرجع‌های [۱۲] و [۹] دارای طول $L = ۹(\mathrm{m})$ و شعاع روتور $d_3 = ۰/۵(\mathrm{m})$ در نظر گرفته می‌شود. این تیر دارای جرم بر واحد طول $\rho A = ۱۰(\mathrm{kg/m})$ ، سفتی طولی $EA = ۲/۲۳\times۱۰^۸\,(\mathrm{N})$ و سفتی عرضی $EJ_{22} = ۳/۹۹\times۱۰^۵\,(\mathrm{N\cdot m^2})$ می‌باشد و با سرعت $\omega_R = ۳۰(\mathrm{rad/s})$ در حال چرخش است. فرکانس‌های طبیعی غیرخطی اول تا سوم به‌ترتیب در شکل‌های ۲، ۳ و۴ نشان داده شده‌اند. در هر دو مرجع مقایسه شونده با صرف‌نظر از اثر نیروی کریولیس جفت شدگی بین حرکت پیچشی و عرضی در نظر گرفته نشده و تنها معادلات عرضی و طولی را در نظر گرفته‌اند. از طرف دیگر معادلات مرجع [۱۲] با استفاده از رابطه کرنش-تغییرمکان فون-کارمن بدست آمده، در حالی که معادلات مرجع [۹] بر اساس روش فرمولاسیون دقیق هندسی استخراج شده‌اند. نتایج مرجع [۱۲] با استفاده از روش

مقیاس‌های چندگانه‌ای بدست آمده که بر معادلات گسسته‌سازی شده با استفاده از روش گلرکین اعمال گشته است، در حالی که نتایج مرجع [۹] بر اساس روش مقیاس‌های چندگانه‌ای می‌باشد که مشابه این مقاله بر معادلات پاره‌ای اعمال شده است. همانگونه که مشاهده می‌گردد در هر سه فرکانس اول محاسبه شده، فرکانس خطی بدست آمده حاضر دقیقا با فرکانس طبیعی خطی ارائه شده در مرجع [۹] مطابقت دارد و دارای مقادیری کمتر از مرجع [۱۲] می‌باشد که دلیل آن دقت بالاتر روش فرمولاسیون دقیق هندسی است. از طرف دیگر علامت ضریب غیرخطی مؤثر بدست آمده نیز با هر دو مرجع سازگار است و بدین ترتیب به‌ترتیب برای فرکانس‌های اول تا سوم به‌ترتیب نرم‌شوندگی، سخت‌شوندگی و سخت‌شوندگی پیش‌بینی گردیده است.

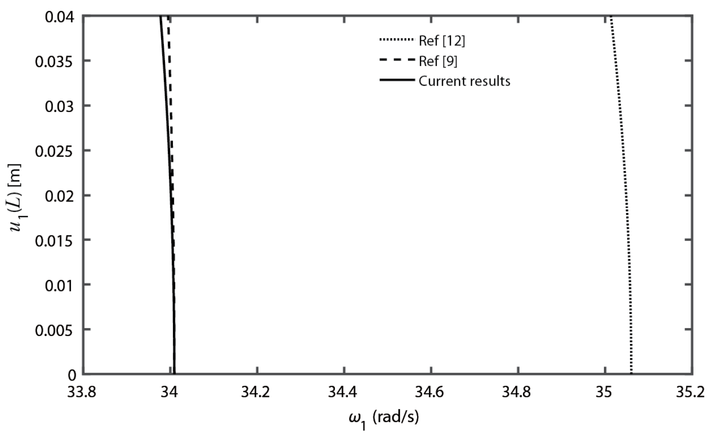

Fig. 2. Variations of the current first nonlinear natural frequency in terms of the tip point amplitude of the rotating beam (solid-lines) vs the associated results from Ref. [9] (dashed-lines) and Ref. [12] (dotted-lines)

شکل ۲: تغییرات فرکانس غیرخطی اول عرضی حاضر نسبت به دامنه انتهای تیر چرخان (خط پر) در مقایسه با نتایج متناظر از مرجع [۹] (خط چین) و مرجع [۱۲] (نقطه)

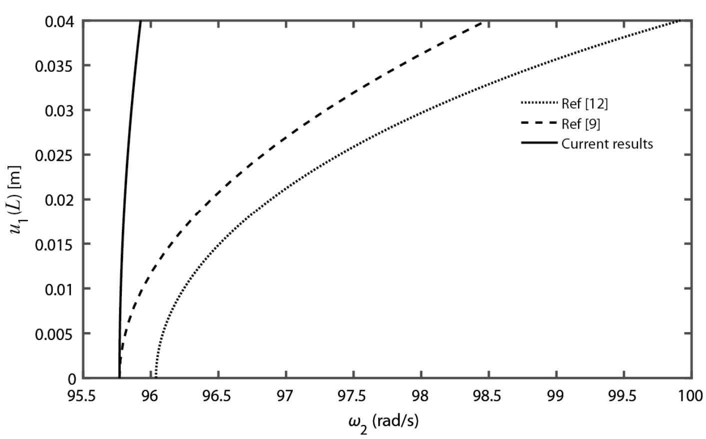

Fig. 3. Variations of the current second nonlinear natural frequency in terms of the tip point amplitude of the rotating beam (solid-lines) vs the associated results from Ref. [9] (dashed-lines) and Ref. [12] (dotted-lines)

شکل ۳: تغییرات فرکانس غیرخطی دوم عرضی حاضر نسبت به دامنه انتهای تیر چرخان (خط پر) در مقایسه با نتایج متناظر از مرجع [۹] (خط چین) و مرجع [۱۲] (نقطه)

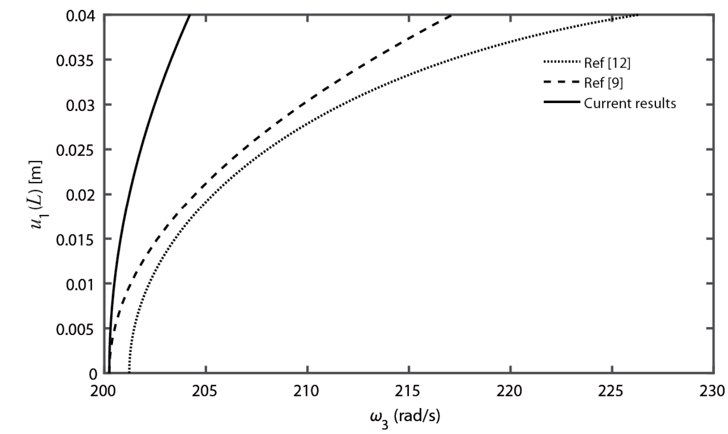

Fig. 4. Variations of the current third nonlinear natural frequency in terms of the tip point amplitude of the rotating beam (solid-lines) vs the associated results from Ref. [9] (dashed-lines) and Ref. [12] (dotted-lines)

شکل ۴: تغییرات فرکانس غیرخطی سوم عرضی حاضر نسبت به دامنه انتهای تیر چرخان (خط پر) در مقایسه با نتایج متناظر از مرجع [۹] (خط چین) و مرجع [۱۲] (نقطه)

۴-۱- نتایج حاضر

پس از اعتبارسنجی نتایج حاضر جهت مشاهده اثر جفت شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس تیری که در مرجع [۱۰] بدون اثر نیروی کریولیس مورد تحلیل قرار گرفته است، مورد مطالعه قرار می‌گیرد. فرمولاسیون مورد استفاده شده در آن مرجع نیز فرمولاسیون دقیق هندسی است اما تنها حرکت‌های عرضی و طولی در نظر گرفته شده‌اند. این تیر کامپوزیتی با لایه‌های $\left[۰°/۹۰°/۹۰°/۰°\right]$ می‌باشد و دارای شعاع روتور $d_3 = ۰/۲(\mathrm{m})$، طول $L = ۲(\mathrm{m})$، ضخامت $h = ۰/۰۰۵(\mathrm{m})$ و عرض $b = ۰/۰۵(\mathrm{m})$ می‌باشد. خواص ماده‌ای لایه‌ها نیز شامل $E_1 = E_2 = ۹/۶(\mathrm{GPa})$، $E_3 = ۱۴۵(\mathrm{GPa})$، $G_{12} = ۳/۴(\mathrm{GPa})$، $G_{13} = G_{23} = ۴/۱(\mathrm{GPa})$، $\nu_{31} = \nu_{32} = ۰/۳$، $\nu_{21} = ۰/۵$ و $\rho = ۱۳۸۹\left(\mathrm{kg/m^3}\right)$ می‌باشد.

در شکل‌های ۵-الف و ۵-ب، ضریب غیرخطی مؤثر عرضی مود اول $\gamma_{1,1,i}$ در مقایسه با نتایج مرجع [۱۰] نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد مقدار $\gamma_{1,1,i}$ پیش‌بینی شده در حالت در نظر گرفتن جفت‌شدگی خمشی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس در مقایسه با حالت بدون در نظر گرفتن آن متفاوت بدست آمده است. با این وجود همانگونه که مشاهده می‌شود در بازه‌های سرعت متفاوت، علامت ضریب غیرخطی مؤثر یعنی نرم شوندگی یا سخت شوندگی فرکانس طبیعی غیرخطی مورد نظر در دو حالت مقایسه شده مشابه یکدیگر حاصل شده است. بدین ترتیب در سرعت صفر که نتایج برای یک تیر یکسرگیردار ثابت حاصل شده، علامت ضریب غیرخطی مؤثر در دو حالت یکسان و فرکانس طبیعی غیرخطی اول عرضی نرم‌شونده بدست آمده است.

در شکل ۵-ج نتایج حاضر برای مقدار $\gamma_{1,1,R}$ برای مود اول عرضی ارائه شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد این مقدار در برابر مقادیر ارائه شده در شکل‌های ۵-الف و ۵-ب برای $\gamma_{1,1,i}$ بسیار کوچک است و بدین ترتیب $\gamma_{1,1,R}$ در این مقاله صفر در نظر گرفته شده است.

شکل ۶ نتایج ضریب غیرخطی مؤثر مود دوم عرضی $\gamma_{1,2,i}$ در مقایسه با مرجع [۱۰] را ارائه نموده است. همان‌گونه که مشاهده می‌گردد بر خلاف مود اول عرضی که هر دو حالت علامت ضریب غیرخطی مؤثر یکسانی را پیش‌بینی نمودند در این مود، ضریب غیرخطی مؤثر بدست آمده با در نظر گرفتن جفت‌شدگی خمشی-پیچشی تا سرعت ۴۷۱ دور بر دقیقه مثبت می‌باشد در حالی که از این سرعت به بعد ضریب غیرخطی مؤثر منفی خواهد بود. از طرف دیگر بدون در نظر گرفتن جفت‌شدگی خمشی-پیچشی ضریب غیرخطی مؤثر در تمام بازه مورد بررسی مثبت می‌باشد. در آخر مشابه نتایج بدست آمده برای مود اول عرضی علامت ضریب غیرخطی مؤثر برای تیرهای ثابت یکسرگیردار یکسان بدست آمده است که بدین ترتیب فرکانس طبیعی غیرخطی دوم عرضی سخت‌شونده محاسبه شده است.

نتایج استخراج شده برای ضریب غیرخطی مؤثر مود سوم عرضی $\gamma_{1,3,i}$ در مقایسه با مرجع [۱۰] در شکل ۷ نمایش داده شده است. مشاهده می‌گردد که با در نظر گرفتن معادله حرکت طولی بدلیل حضور تشدید داخلی ۲ به ۱ بین مودهای سوم عرضی و اول طولی در سرعت $\omega_R = ۶۵۱۰(\mathrm{rpm})$ نتایج ارائه شده در مرجع [۱۰] دارای تکینگی در این سرعت می‌باشد. این تکینگی در نتایج حاضر بدلیل عدم در نظر گرفتن حرکت طولی دیده نمی‌شود. همان‌گونه که مشاهده می‌شود علامت ضریب غیرخطی مؤثر پیش‌بینی شده با در نظر گرفتن جفت‌شدگی خمشی-پیچشی همواره مثبت است در حالی که پس از نقطه تکینگی در بازه بسیار کمی بدون در نظر گرفتن این جفت‌شدگی علامت ضریب غیرخطی مؤثر متفاوتی پیش‌بینی شده است. لذا می‌توان گفت در تحلیل ارتعاشات غیرخطی و پیش از محاسبه فرکانس‌های غیرخطی تیرهای چرخان حتما باید طیف تغییرات فرکانس‌های طبیعی خطی رسم گردد و در صورتی که در سرعت چرخش خاصی تشدید داخلی ۲ به ۱ بین مودهای طولی و عرضی رخ می‌دهد در آن سرعت خاص باید برای محاسبه فرکانس غیرخطی از ابتدا با فرض تشدید داخلی اقدام به حل مسأله نمود و معادله حرکت طولی نیز در کنار معادلات دیگر دخیل گردد (به مرجع [۱۲] مراجعه گردد).

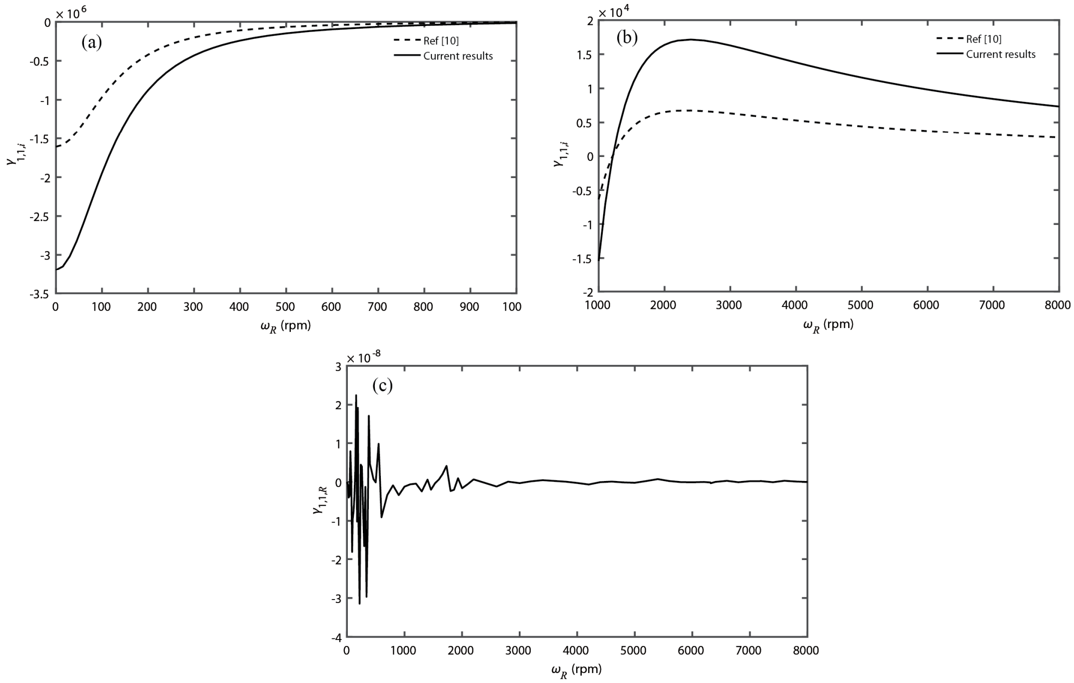

Fig. 5. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the first flapping mode $\gamma_{1,1,i}$ [current results (solid-lines) and Ref. [10] results (dashed-lines)] (a)- $\gamma_{1,1,i}$ for 0-1000 rpm, (b)- $\gamma_{1,1,i}$ for 1000-8000 rpm and (c)- variations of $\gamma_{1,1,R}$ for the first flapping mode

شکل ۵: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود اول عرضی $\gamma_{1,1,i}$ [نتایج حاضر (خط پر) و نتایج مرجع [۱۰] (خط چین)] الف) $\gamma_{1,1,i}$ در سرعت ۰ تا ۱۰۰۰ دور بر دقیقه، ب) $\gamma_{1,1,i}$ در سرعت ۱۰۰۰ تا ۸۰۰۰ دور بر دقیقه و پ) تغییرات $\gamma_{1,1,R}$ برای مود اول عرضی

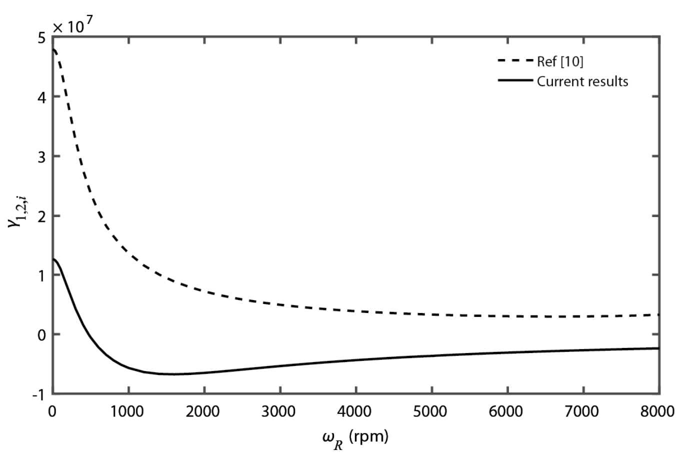

Fig. 6. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the second flapping mode $\gamma_{1,2,i}$ [current results (solid-lines) and Ref. [10] results (dashed-lines)]

شکل ۶: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود دوم عرضی $\gamma_{1,2,i}$ [(نتابج حاضر (خط پر) و نتایج مرجع [۱۰] (خط چین)]

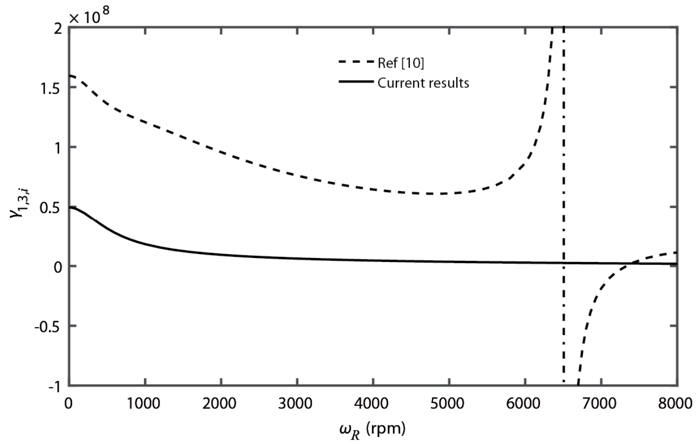

Fig. 7. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the third flapping mode $\gamma_{1,3,i}$ [current results (solid-lines) and Ref. [10] results (dashed-lines)]

شکل ۷: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود سوم عرضی $\gamma_{1,3,i}$ [(نتایج حاضر (خط پر) و نتایج مرجع [۱۰] (خط چین)]

شکل‌های ۸ و ۹ به‌ترتیب ضریب غیرخطی مؤثر برای مودهای اول و دوم پیچشی را نمایش می‌دهند. همان‌گونه که در این شکل‌ها مشاهده می‌شود برای فرکانس طبیعی غیرخطی هر دو مود پیچشی رفتاری نرم‌شونده پیش‌بینی شده است.

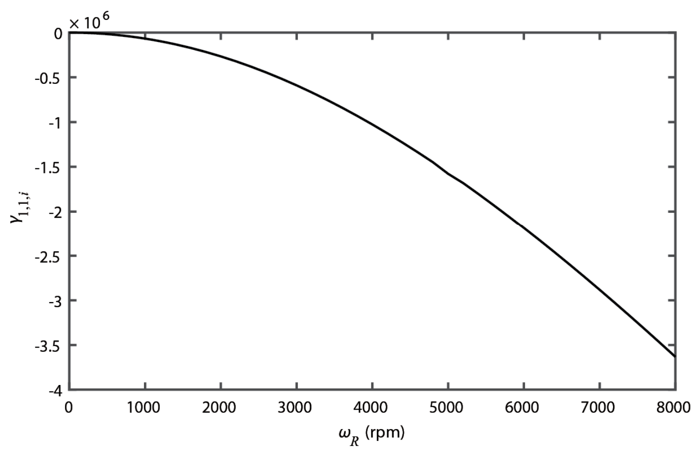

Fig. 8. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the first torsional mode $\gamma_{1,1,i}$

شکل ۸: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود اول پیچشی $\gamma_{1,1,i}$

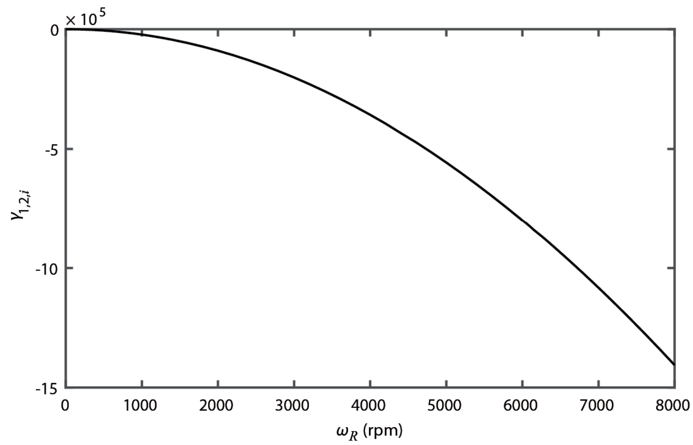

Fig. 9. Variations of the effective nonlinearity coefficient of the second torsional mode $\gamma_{1,2,i}$

شکل ۹: تغییرات ضریب غیرخطی مؤثر در مود دوم پیچشی $\gamma_{1,2,i}$

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن معادلات حرکت غیرخطی عرضی-پیچشی بدست آمده بر اساس فرمولاسیون دقیق هندسی به بررسی ارتعاشات آزاد غیرخطی عرضی تیرهای چرخان با در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس پرداخته شد. روش مقیاس‌های چندگانه به فرم غیرخطی درجه سوم معادلات که شامل غیرخطی‌های درجه سوم سفتی و اینرسی بود اعمال شد و رابطه‌ای برای فرکانس‌های غیرخطی عرضی بدست آمد. پس از اعتبار سنجی نتایج حاضر، تحلیلی برای تأثیر سرعت بر ضریب غیرخطی مؤثر سه مود اول عرضی و دو مود اول پیچشی انجام گرفت و نتایج حاضر با در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس در مقایسه با نتایج موجود در مقالات مرتبط با صرفنظر از جفت‌شدگی مذکور ارائه گردید. مهمترین نتایج بدست آمده بدین ترتیب است:

۱- در اولین و دومین مود پیچشی فرکانس غیرخطی پیچشی رفتاری نرم‌شونده نشان می‌دهند؛

۲- با وجود اینکه حضور و عدم حضور نیروی کریولیس تأثیری در فرکانس‌های طبیعی خطی عرضی و پیچشی نمی‌گذارد اما مقدار ضریب غیرخطی مؤثر برای سه مود اول عرضی با در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس با نتایج عدم در نظر گرفتن این جفت‌شدگی متفاوت است؛

۳- در مودهای اول و سوم علامت ضریب غیرخطی مؤثر پیش‌بینی شده در هر دو حالت، با و بدون در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس یکسان می‌باشد (بجز محدوده بسیار کوچکی در نزدیک نقطه تکینگی)؛

۴- علامت ضریب غیرخطی مؤثر برای مود دوم عرضی تنها در سرعتهای چرخش پایین با و بدون در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس یکسان می‌باشد؛

۵- در حالت خاص برای تیرهای یکسرگیردار ثابت که سرعت چرخش صفر می‌باشد، علامت ضریب غیرخطی مؤثر پیش بینی شده با و بدون در نظر گرفتن جفت‌شدگی عرضی-پیچشی ناشی از نیروی کریولیس کاملا یکسان است؛

۶- در تحلیل غیرخطی و محاسبه فرکانس‌های عرضی در تیرهای چرخان باید امکان تشدید داخلی برای مودهای طولی و عرضی با رسم طیف فرکانس‌های خطی در نظر گرفته شود و در صورت این امکان از ابتدای تحلیل باید مودهای طولی را در تحلیل دخالت داده و اقدام به محاسبه فرکانس‌های طبیعی عرضی غیرخطی نمود.

سپاسگزاری

این مقاله مستخرج از نتایج طرح تحقیقاتی اجرا شده به شماره قرارداد 96GRD1M1754 از محل اعتبارات معاونت پژوهش و فناوری دانشگاه شهرکرد می‌باشد.

مراجع

[1] D.H. Hodges, E. Dowell, Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades, NASA TN D-7818, (1974).
[2] M.C. Da Silva, D. Hodges, Nonlinear flexure and torsion of rotating beams, with application to helicopter rotor blades-I. Formulation, Vertica, 10(2) (1986) 151-169.
[3] M.C. da Silva, D. Hodges, Nonlinear flexure and torsion of rotating beams, with application to helicopter rotor blades-II. Response and stability results, Vertica, 10(2) (1986) 171-186.
[4] D.H. Hodges, A mixed variational formulation based on exact intrinsic equations for dynamics of moving beams,

International journal of solids and structures, 26(11) (1990) 1253-1273.
[5] D.H. Hodges, Comment on 'Flexural behavior of a rotating sandwich tapered beam' and on 'Dynamic analysis for free vibrations of rotating sandwich tapered beams', AIAA journal, 33(6) (1995) 1168-1170.
[6] K. Avramov, C. Pierre, N. Shyriaieva, Nonlinear equations of flexural-flexural-torsional oscillations of rotating beams with arbitrary cross-section, International Applied Mechanics, 44(5) (2008) 582-589.
[7] J. Valverde, D. García-Vallejo, Stability analysis of a substructured model of the rotating beam, Nonlinear dynamics, 55(4) (2009) 355-372.
[8] W. Lacarbonara, H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades—part 1: linear modal properties, Nonlinear Dynamics, 70(1) (2012) 659-675.
[9] H. Arvin, W. Lacarbonara, F. Bakhtiari-Nejad, A geometrically exact approach to the overall dynamics of elastic rotating blades—part 2: flapping nonlinear normal modes, Nonlinear Dynamics, 70(3) (2012) 2279-2301.
[10] H. Arvin, W. Lacarbonara, A fully nonlinear dynamic formulation for rotating composite beams: nonlinear normal modes in flapping, Composite structures, 109 (2014) 93-105.
[11] Ö. Turhan, G. Bulut, On nonlinear vibrations of a rotating beam, Journal of sound and vibration, 322(1-2) (2009) 314-335.
[12] H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, Non-linear modal analysis of a rotating beam, International Journal of Non-Linear Mechanics, 46(6) (2011) 877-897.
[13] W. Lacarbonara, Nonlinear structural mechanics: theory, dynamical phenomena and modeling, Springer Science & Business Media, 2013.
[14] A.H. Nayfeh, D.T. Mook, Nonlinear oscillations, John Wiley & Sons, 2008.
[15] L. Meirovitch, Principles and techniques of vibrations, Prentice Hall New Jersey, 1997.
[16] H. Arvin, F. Bakhtiari-Nejad, Nonlinear free vibration analysis of rotating composite Timoshenko beams, Composite Structures, 96 (2013) 29-43.

پیوست‌ها

پیوست الف- پارامترهای مورد استفاده در معادله حرکت

$$\mathbf{R}=\begin{bmatrix}\cos(\theta_3(s,t))\cos(\theta_2(s,t)) & \sin(\theta_3(s,t)) & -\cos(\theta_3(s,t))\sin(\theta_2(s,t))\\ -\sin(\theta_3(s,t))\cos(\theta_2(s,t)) & \cos(\theta_3(s,t)) & \sin(\theta_3(s,t))\sin(\theta_2(s,t))\\ \sin(\theta_2(s,t)) & 0 & \cos(\theta_2(s,t))\end{bmatrix}$$ (الف-۱)

$$\begin{aligned}&\breve{\mu}_1=\partial_s\theta_2(s,t)\sin(\theta_3(s,t))\\&\breve{\mu}_2=\partial_s\theta_2(s,t)\cos(\theta_3(s,t))\\&\breve{\mu}_3=\partial_s\theta_3(s,t)\end{aligned}$$ (الف-۲)

$$\begin{aligned}&\breve{\omega}_1=\partial_t\theta_2(s,t)\sin(\theta_3(s,t))+\omega_R\cos(\theta_2(s,t))\cos(\theta_3(s,t))\\&\breve{\omega}_2=\partial_t\theta_2(s,t)\cos(\theta_3(s,t))-\omega_R\cos(\theta_2(s,t))\sin(\theta_3(s,t))\\&\breve{\omega}_3=\partial_t\theta_3(s,t)+\omega_R\sin(\theta_2(s,t))\end{aligned}$$ (الف-۳)

پیوست ب- اپراتورهای خطی اینرسی، ژیروسکوپی و سفتی معادلات حرکت و شرایط مرزی متناظر

$$\begin{aligned}&I_{11}=-(\bullet)+2\partial_s(\bullet)v_{inv}^0{}'v_{inv}^0/\alpha_{22}+v_{inv}^0{}^2\partial_{ss}(\bullet)/\alpha_{22},\ I_{16}=0,\ G_{11}=0,\ G_{16}=-2\lambda(\bullet)v_{inv}^0{}'/\alpha_{22}-2\lambda\partial_s(\bullet)v_{inv}^0/\alpha_{22}\\&L_{11}=-v_{inv}^0{}^2\lambda^2\partial_{ss}(\bullet)/\alpha_{22}+\alpha_{22}\partial_{ss}(\bullet)N^0v_{inv}^0+\alpha_{22}\partial_s(\bullet)N^0{}'v_{inv}^0-\partial_s(\bullet)v_{inv}^0{}'''v_{inv}^0-4\partial_{sss}(\bullet)v_{inv}^0{}'v_{inv}^0-3\partial_{ss}(\bullet)v_{inv}^0{}''v_{inv}^0\\&\quad-v_{inv}^0{}'\partial_s(\bullet)v_{inv}^0{}''-2v_{inv}^0{}'^2\partial_{ss}(\bullet)-\partial_{ssss}(\bullet)v_{inv}^0{}^2+\alpha_{22}\partial_s(\bullet)N^0v_{inv}^0{}'-2\lambda^2v_{inv}^0{}'\partial_s(\bullet)v_{inv}^0/\alpha_{22}\end{aligned}$$ (ب-۱)

$$\begin{aligned}&I_{61}=0,I_{66}=-(\bullet)/\alpha_{32},G_{66}=0,\ G_{61}=\lambda\partial_s(\bullet)v_{inv}^0/\alpha_{12}-\lambda\partial_s(\bullet)v_{inv}^0/\alpha_{22}-\lambda\partial_s(\bullet)v_{inv}^0/\alpha_{32}\\&L_{66}=\alpha_{22}\partial_{ss}(\bullet)/(\alpha_{32}(2+2\overline{\nu}))+\lambda^2(\bullet)/\alpha_{22}-\lambda^2(\bullet)/\alpha_{12}\end{aligned}$$ (ب-۲)

$$I_{BC,11}=\partial_s(\bullet)/\alpha_{22},G_{BC,11}=-2\lambda(\bullet)/\alpha_{22},\ L_{BC,11}=-\lambda^2\partial_s(\bullet)/\alpha_{22}-\partial_{sss}(\bullet)-\partial_s(\bullet)v_{inv}^0{}''-2\partial_{ss}(\bullet)v_{inv}^0{}'$$ (ب-۳)

$$I_{BC,12}=0, G_{BC,12}=0, L_{BC,12}=\partial_{ss}(\bullet)+\partial_{s}(\bullet)v_{inv}^{0}{}'$$
(ب-۴)

$$I_{BC,6}=0, G_{BC,6}=0, L_{BC,6}=\partial_{s}(\bullet)$$
(ب-۵)

پیوست پ- ترم‌های غیرخطی اینرسی و سفتی معادلات حرکت و شرایط مرزی متناظر

$$\begin{aligned} i_{10}^{(3)}=&-2\lambda v_{inv}^{0}(s)\partial_{ts}\theta_3\theta_3{}^2/\alpha_{12}+6v_{inv}^{0}(s)^3\lambda\partial_t\theta_3\partial_s u_1\partial_{ss}u_1/\alpha_{22}+3\lambda\partial_{ts}\theta_3 v_{inv}^{0}(s)^3\partial_s u_1{}^2/\alpha_{22}\\ &+2\lambda\partial_{ts}\theta_3 v_{inv}^{0}(s)\theta_3{}^2/\alpha_{22}-2\lambda\partial_t\theta_3 v_{inv}^{0}{}'(s)\theta_3{}^2/\alpha_{12}+2\lambda\partial_t\theta_3 v_{inv}^{0}{}'(s)\theta_3{}^2/\alpha_{22}\\ &+9v_{inv}^{0}(s)^2\lambda\partial_t\theta_3 v_{inv}^{0}{}'(s)\partial_s u_1{}^2/\alpha_{22}+4v_{inv}^{0}(s)\partial_s\theta_3\lambda\theta_3\partial_t\theta_3/\alpha_{22}-4v_{inv}^{0}(s)\partial_s\theta_3\lambda\theta_3\partial_t\theta_3/\alpha_{12} \end{aligned}$$
(پ-۱)

$$\begin{aligned} i_{11}^{(3)}=&-8v_{inv}^{0}(s)^3\partial_s u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)\partial_{ts}u_1{}^2/\alpha_{22}-2{v_{inv}^{0}}^{2}\theta_3\partial_{ts}\theta_3\partial_{ts}u_1/\alpha_{22}-2v_{inv}^{0}(s)^2\theta_3\partial_t\theta_3\partial_{tss}u_1/\alpha_{22}\\ &-4v_{inv}^{0}(s)^4\partial_s u_1\partial_{tss}u_1\partial_{ts}u_1/\alpha_{22}-2{v_{inv}^{0}}^{4}\partial_{ts}u_1{}^2\partial_{ss}u_1/\alpha_{22}-4v_{inv}^{0}(s)\theta_3\partial_t\theta_3\partial_{ts}u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)/\alpha_{22}\\ &-2v_{inv}^{0}(s)^2\partial_s\theta_3\partial_t\theta_3\partial_{ts}u_1/\alpha_{22}+4v_{inv}^{0}(s)\theta_3\partial_t\theta_3\partial_{ts}u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)/\alpha_{12}+2{v_{inv}^{0}}^{2}\theta_3\partial_{ts}\theta_3\partial_{ts}u_1/\alpha_{12}\\ &+2v_{inv}^{0}(s)^2\partial_s\theta_3\partial_t\theta_3\partial_{ts}u_1/\alpha_{12}+2{v_{inv}^{0}}^{2}\theta_3\partial_t\theta_3\partial_{tss}u_1/\alpha_{12} \end{aligned}$$
(پ-۲)

$$\begin{aligned} i_{12}^{(3)}=&-\partial_{ttss}u_1 v_{inv}^{0}(s)^2\theta_3{}^2/\alpha_{22}+\partial_{ttss}u_1 v_{inv}^{0}(s)^2\theta_3{}^2/\alpha_{12}-2\partial_{tts}u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)v_{inv}^{0}(s)\theta_3{}^2/\alpha_{22}\\ &-4v_{inv}^{0}(s)^4\partial_s u_1\partial_{ss}u_1\partial_{tts}u_1/\alpha_{22}-2v_{inv}^{0}(s)^2\partial_s\theta_3\theta_3\partial_{tts}u_1/\alpha_{22}-8{v_{inv}^{0}}^{3}\partial_s u_1{}^2 v_{inv}^{0}{}'(s)\partial_{tts}u_1/\alpha_{22}\\ &-2v_{inv}^{0}(s)^4\partial_s u_1{}^2\partial_{ttss}u_1/\alpha_{22}+2v_{inv}^{0}(s)^2\partial_s\theta_3\theta_3\partial_{tts}u_1/\alpha_{12}+2\partial_{tts}u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)v_{inv}^{0}(s)\theta_3{}^2/\alpha_{12} \end{aligned}$$
(پ-۳)

$$\begin{aligned} n_{1}^{(3)}=&-2\lambda^2\partial_s u_1 v_{inv}^{0}(s)v_{inv}^{0}{}'(s)\theta_3{}^2/\alpha_{12}+2v_{inv}^{0}(s)^4\partial_s u_1{}^2\partial_{ssss}u_1+\partial_{ssss}u_1 v_{inv}^{0}(s)^2\theta_3{}^2\\ &+2v_{inv}^{0}(s)^3\partial_s u_1{}^3 v_{inv}^{0}{}'''(s)-\frac{3}{2}\alpha_{22}v_{inv}^{0}(s)^3\partial_s u_1{}^2\partial_{ss}u_1+3\alpha_{22}v_{inv}^{0}(s)^2\partial_s u_1{}^2\partial_{ss}u_1\\ &+v_{inv}^{0}{}'(s)\partial_s u_1 v_{inv}^{0}{}''(s)\theta_3{}^2+4\partial_{sss}u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)v_{inv}^{0}(s)\theta_3{}^2+3\partial_{ss}u_1 v_{inv}^{0}{}''(s)v_{inv}^{0}(s)\theta_3{}^2\\ &+4v_{inv}^{0}(s)^2\theta_3\partial_s\theta_3\partial_{sss}u_1+2v_{inv}^{0}(s)^2\theta_3\partial_{ss}\theta_3\partial_{ss}u_1+\partial_s u_1 v_{inv}^{0}{}'''(s)v_{inv}^{0}(s)\theta_3{}^2\\ &+8v_{inv}^{0}(s)^4\partial_s u_1\partial_{ss}u_1\partial_{sss}u_1+30v_{inv}^{0}(s)^2\partial_s u_1{}^2\partial_{ss}u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)^2+16v_{inv}^{0}(s)^3\partial_s u_1{}^2\partial_{sss}u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)\\ &+24v_{inv}^{0}(s)^3\partial_s u_1\partial_{ss}u_1{}^2 v_{inv}^{0}{}'(s)+14v_{inv}^{0}(s)^3\partial_s u_1{}^2\partial_{ss}u_1 v_{inv}^{0}{}''(s)-\alpha_{22}v_{inv}^{0}(s)^3 N^{0\prime}(s)\partial_s u_1{}^3\\ &+4v_{inv}^{0}(s)\partial_s u_1{}^3 v_{inv}^{0}{}'(s)^3+6v_{inv}^{0}(s)^4\lambda^2\partial_s u_1{}^2\partial_{ss}u_1/\alpha_{22}+\lambda^2\partial_{ss}u_1 v_{inv}^{0}(s)^2\theta_3{}^2/\alpha_{22}\\ &-3\alpha_{22}v_{inv}^{0}(s)^3\partial_{ss}u_1 N^{0}(s)\partial_s u_1{}^2+10v_{inv}^{0}(s)^2\partial_s u_1{}^3 v_{inv}^{0}{}'(s)v_{inv}^{0}{}''(s)+2v_{inv}^{0}(s)^4\partial_{ss}u_1{}^3\\ &+2\alpha_{22}v_{inv}^{0}(s)\partial_s u_1{}^3 v_{inv}^{0}{}'(s)-\frac{3}{2}\alpha_{22}v_{inv}^{0}(s)^2\partial_s u_1{}^3 v_{inv}^{0}{}'(s)-10\alpha_{22}v_{inv}^{0}(s)\partial_s\theta_3\theta_3\partial_{ss}u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)/\alpha_{12}\\ &-2\alpha_{22}v_{inv}^{0}(s)\partial_{ss}\theta_3\theta_3\partial_s u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)/\alpha_{12}-4\alpha_{22}v_{inv}^{0}(s)\partial_s\theta_3\theta_3\partial_s u_1 v_{inv}^{0}{}''(s)/\alpha_{12}\\ &-\lambda^2\partial_{ss}u_1 v_{inv}^{0}(s)^2\theta_3{}^2/\alpha_{12}-\alpha_{22}\partial_s u_1 v_{inv}^{0}{}'''(s)v_{inv}^{0}(s)\theta_3{}^2/\alpha_{12}-4\alpha_{22}v_{inv}^{0}(s)^2\partial_s\theta_3\theta_3\partial_{sss}u_1/\alpha_{12}\\ &-3\alpha_{22}\partial_{ss}u_1 v_{inv}^{0}{}''(s)v_{inv}^{0}(s)\theta_3{}^2/\alpha_{12}-\alpha_{22}\partial_s u_1 v_{inv}^{0}{}''(s)v_{inv}^{0}{}'(s)\theta_3{}^2/\alpha_{12}+2v_{inv}^{0}(s)^2\partial_s\theta_3{}^2\partial_{ss}u_1\\ &-2\alpha_{22}v_{inv}^{0}(s)^2\partial_{ss}\theta_3\theta_3\partial_{ss}u_1/\alpha_{12}-2\alpha_{22}\partial_{ss}u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)^2\theta_3{}^2/\alpha_{12}-2\alpha_{22}v_{inv}^{0}(s)^2\partial_s\theta_3{}^2\partial_{ss}u_1/\alpha_{12}\\ &+2v_{inv}^{0}(s)\theta_3\partial_{ss}\theta_3\partial_s u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)+2\theta_3\partial_s\theta_3 v_{inv}^{0}{}'(s)^2\partial_s u_1+2\partial_s\theta_3{}^2\partial_s u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)v_{inv}^{0}(s)\\ &+8v_{inv}^{0}(s)^3\lambda^2\partial_s u_1{}^3 v_{inv}^{0}{}'(s)/\alpha_{22}-3\alpha_{22}v_{inv}^{0}(s)^2\partial_s u_1{}^3 N^{0}(s)v_{inv}^{0}{}'(s)+2v_{inv}^{0}{}'(s)^2\partial_{ss}u_1\theta_3{}^2\\ &+10v_{inv}^{0}(s)\theta_3\partial_s\theta_3\partial_{ss}u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)-\alpha_{22}\partial_{ssss}u_1 v_{inv}^{0}(s)^2\theta_3{}^2/\alpha_{12}+4v_{inv}^{0}(s)\theta_3\partial_s\theta_3\partial_s u_1 v_{inv}^{0}{}''(s)\\ &+2\lambda^2 v_{inv}^{0}{}'(s)\partial_s u_1 v_{inv}^{0}(s)\theta_3{}^2/\alpha_{22}+2{v_{inv}^{0}}^{2}\partial_s\theta_3\lambda^2\theta_3\partial_s u_1/\alpha_{22}-2\alpha_{22}\partial_s\theta_3\theta_3 v_{inv}^{0}{}'(s)^2\partial_s u_1/\alpha_{12}\\ &-2\alpha_{22}\partial_s\theta_3{}^2\partial_s u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)v_{inv}^{0}/\alpha_{12}-2{v_{inv}^{0}}^{2}\partial_s\theta_3\lambda^2\theta_3\partial_s u_1/\alpha_{12}-4\alpha_{22}\partial_{sss}u_1 v_{inv}^{0}{}'(s)v_{inv}^{0}\theta_3{}^2/\alpha_{12} \end{aligned}$$
(پ-۴)

$$\begin{aligned} i_{60}^{(3)}=&-\frac{3}{2}\lambda\partial_s u_1{}^2 v_{inv}^{0}(s)^3\partial_{ts}u_1/\alpha_{12}+\frac{3}{2}\lambda\partial_s u_1{}^2 v_{inv}^{0}(s)^3\partial_{ts}u_1/\alpha_{32}+\frac{3}{2}\lambda\partial_s u_1{}^2 v_{inv}^{0}(s)^3\partial_{ts}u_1/\alpha_{22}\\ &+2\lambda\theta_3{}^2\partial_{ts}u_1 v_{inv}^{0}(s)/\alpha_{22}-2\lambda\theta_3{}^2\partial_{ts}u_1 v_{inv}^{0}(s)/\alpha_{12} \end{aligned}$$
(پ-۵)

$$i_{61}^{(3)}=\theta_3\partial_{ts}u_1{}^2 v_{inv}^{0}(s)^2/\alpha_{12}-\theta_3\partial_{ts}u_1{}^2 v_{inv}^{0}(s)^2/\alpha_{22} \qquad i_{62}^{(3)}=0$$
(پ-۶)

$$
\begin{aligned}
n_6^{(3)} = {} & \theta_3\partial_s u_1{}^2 v_{inv}^0{}'(s)^2 - \frac{2}{3}\lambda^2\theta_3{}^3/\alpha_{22} - 2\alpha_{22}v_{inv}^0(s)v_{inv}^0{}'(s)\theta_3\partial_{ss}u_1\partial_s u_1/\alpha_{12} \\
& -\alpha_{22}\theta_3\partial_s u_1{}^2 v_{inv}^0{}'(s)^2/\alpha_{12} - \lambda^2\theta_3\partial_s u_1{}^2 v_{inv}^0(s)^2/\alpha_{22} + \theta_3\partial_{ss}u_1{}^2 v_{inv}^0(s)^2 + \frac{2}{3}\lambda^2\theta_3{}^3/\alpha_{12} \\
& +2\theta_3\partial_{ss}u_1 v_{inv}^0(s)\partial_s u_1 v_{inv}^0{}'(s) - \alpha_{22}\theta_3\partial_{ss}u_1{}^2 v_{inv}^0(s)^2/\alpha_{12} + \lambda^2\theta_3\partial_s u_1{}^2 v_{inv}^0(s)^2/\alpha_{12}
\end{aligned}
\tag{پ-۷}
$$

$$
\begin{aligned}
n_{BC,11}^{(3)} = {} & \lambda^2\partial_s u_1{}^3/\alpha_{22} + \lambda\partial_t\theta_3\partial_s u_1{}^2/\alpha_{22} + \theta_3{}^2\lambda\partial_t\theta_3/\alpha_{22} - 2\theta_3\partial_t\theta_3\partial_{ts}u_1/\alpha_{22} + \frac{1}{2}\theta_3{}^2\partial_s u_1 v_{inv}^0{}'' \\
& +6\partial_s u_1{}^2\partial_{ss}u_1 v_{inv}^0{}' - \partial_s u_1{}^2\partial_{tts}u_1/\alpha_{22} - \frac{1}{2}\theta_3{}^2\partial_{tts}u_1/\alpha_{22} + \frac{1}{2}\lambda^2\theta_3{}^2\partial_s u_1/\alpha_{22} + 2\partial_s u_1{}^3 v_{inv}^0{}'^2 \\
& -2\partial_s u_1\partial_{ts}u_1{}^2/\alpha_{22} + \theta_3{}^2\partial_{ss}u_1 v_{inv}^0{}' + \frac{1}{2}\theta_3{}^2\partial_{sss}u_1 + \partial_s u_1{}^3 v_{inv}^0{}'' + 2\partial_s u_1\partial_{ss}u_1{}^2 + \partial_s u_1{}^2\partial_{sss}u_1
\end{aligned}
\tag{پ-۸}
$$

$$
n_{BC,12}^{(3)} = -\partial_s u_1{}^2\partial_{ss}u_1 - \partial_s u_1{}^3 v_{inv}^0{}'(s) - \frac{1}{2}\theta_3{}^2\partial_{ss}u_1 - \frac{1}{2}\theta_3{}^2\partial_s u_1 v_{inv}^0{}'(s) \qquad n_{BC,6}^{(3)} = 0
\tag{پ-۹}
$$

پیوست ت- ترم‌های سمت راست مرتبه دوم و سوم معادلات حرکت و شرایط مرزی متناظر در روش مقیاس‌های چندگانه

$$
\begin{aligned}
RHS(O_{Eq1}^{(2)}) = {} & 2D_0D_1u_{1,0} + 2v_{inv}^0\lambda D_1\partial_s\theta_{3,0}/\alpha_{22} + 2\lambda v_0^{inv}{}'D_1\theta_{3,0}/\alpha_{22} - 2v_{inv}^0{}^2 D_0D_1\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{22} \\
& -4v_0^{inv}{}'v_{inv}^0 D_0D_1\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22}
\end{aligned}
\tag{ت-۱}
$$

$$
RHS(O_{Eq6}^{(2)}) = 2D_0D_1\theta_{3,0}/\alpha_{32} + v_{inv}^0\lambda D_1\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22} + v_{inv}^0\lambda D_1\partial_s u_{1,0}/\alpha_{32} - v_{inv}^0\lambda D_1\partial_s u_{1,0}/\alpha_{12}
\tag{ت-۲}
$$

$$
RHS(O_{BC11}^{(2)}) = 2\lambda D_1\theta_{3,0}/\alpha_{22} - 2D_0D_1\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22}
\tag{ت-۳}
$$

$$
\begin{aligned}
RHS(O_{Eq1}^{(3)}) = {} & 2D_0D_2u_{1,0} + D_1^2u_{1,0} + 2D_0D_1u_{1,1} + 2v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}D_0^2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22} \\
& -2v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}D_0^2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{12} + 2\lambda v_0^{inv}{}'(s)D_1\theta_{3,1}/\alpha_{22} + 2\lambda v_0^{inv}{}'(s)D_2\theta_{3,0}/\alpha_{22} \\
& -2v_{inv}^0(s)^2D_0D_2\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{22} + 8v_{inv}^0(s)^3v_0^{inv}{}'(s)\partial_s u_{1,0}{}^2D_0^2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22} \\
& +4v_{inv}^0(s)^4\partial_s u_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}D_0^2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22} - 2v_{inv}^0(s)v_0^{inv}{}'(s)D_0^2\partial_s u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{12} \\
& -4v_0^{inv}{}'(s)v_{inv}^0(s)\theta_{3,0}D_0\theta_{3,0}D_0\partial_s u_{1,0}/\alpha_{12} + 8v_{inv}^0(s)^3v_0^{inv}{}'(s)\partial_s u_{1,0}D_0\partial_s u_{1,0}{}^2/\alpha_{22} \\
& +4v_{inv}^0(s)^4\partial_s u_{1,0}D_0\partial_s u_{1,0}D_0\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{22} - 2v_{inv}^0(s)\lambda D_0\partial_s\theta_{3,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{22} \\
& +2v_{inv}^0(s)\lambda D_0\partial_s\theta_{3,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{12} - 3v_{inv}^0(s)^3\lambda D_0\partial_s\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}{}^2/\alpha_{22} \\
& +2v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}D_0\theta_{3,0}D_0\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{22} - 2v_{inv}^0(s)^2D_0\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}D_0\partial_s u_{1,0}/\alpha_{12} \\
& -2v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}D_0\theta_{3,0}D_0\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{12} - 2v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}D_0\partial_s\theta_{3,0}D_0\partial_s u_{1,0}/\alpha_{12} \\
& +2v_{inv}^0(s)^4\partial_s u_{1,0}{}^2D_0^2\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{22} - v_{inv}^0(s)^2D_0^2\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{12} \\
& -4v_0^{inv}{}'(s)v_{inv}^0(s)D_0D_1\partial_s u_{1,1}/\alpha_{22} - 4v_0^{inv}{}'(s)v_{inv}^0(s)D_0D_2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22} \\
& -2v_0^{inv}{}'(s)v_{inv}^0(s)D_1^2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22} + 2v_{inv}^0(s)^4D_0\partial_s u_{1,0}{}^2\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{22} \\
& +2v_{inv}^0(s)\lambda D_1\partial_s\theta_{3,1}/\alpha_{22} - 9v_{inv}^0(s)^2\lambda v_0^{inv}{}'(s)D_0\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}{}^2/\alpha_{22} \\
& -4v_{inv}^0(s)\lambda\theta_{3,0}D_0\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}/\alpha_{22} + 2v_0^{inv}{}'(s)v_{inv}^0(s)D_0^2\partial_s u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{22} \\
& +4v_{inv}^0(s)\lambda\theta_{3,0}D_0\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}/\alpha_{12} + 2\lambda v_0^{inv}{}'(s)D_0\theta_{3,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{12} + 2v_{inv}^0\lambda D_2\partial_s\theta_{3,0}/\alpha_{22} \\
& -2\lambda v_0^{inv}{}'(s)D_0\theta_{3,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{22} + v_{inv}^0(s)^2D_0^2\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{22} - 2v_{inv}^0{}^2D_0D_1\partial_{ss}u_{1,1}/\alpha_{22} \\
& -v_{inv}^0(s)^2D_1^2\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{22} - 6v_{inv}^0(s)^3\lambda D_0\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{22} \\
& -2v_{inv}^0(s)^4\partial_{ss}u_{1,0}{}^3 - 2v_{inv}^0(s)^3v_0^{inv}{}'''(s)\partial_s u_{1,0}{}^3 + \alpha_{22}v_0^{inv}{}'(s)v_0^{inv}{}''(s)\partial_s u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{12} \\
& +4\alpha_{22}v_{inv}^0(s)v_0^{inv}{}'(s)\partial_{sss}u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{12} + 2\alpha_{22}v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_{ss}\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{12} \\
& +2\alpha_{22}v_{inv}^0(s)v_0^{inv}{}'(s)\partial_s\theta_{3,0}{}^2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{12} + 2\lambda^2v_0^{inv}{}'(s)v_{inv}^0(s)\partial_s u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{12} \\
& +2\lambda^2v_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}/\alpha_{12} + 2\alpha_{22}v_0^{inv}{}'(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}/\alpha_{12} \\
& (\mathit{continued})
\end{aligned}
\tag{ت-۴}
$$

(*continued*)

$$
\begin{aligned}
&-2\lambda^2\nu_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22}-2\lambda^2\nu_0^{inv}{}'(s)\nu_{inv}^0(s)\partial_s u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{22}\\
&-\nu_0^{inv}{}'(s)\nu_0^{inv}{}''(s)\partial_s u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2-4\nu_{inv}^0(s)\nu_0^{inv}{}'(s)\partial_{sss}u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2\\
&-\nu_0^{inv}{}'''(s)\nu_{inv}^0(s)\partial_s u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2-8\nu_{inv}^0(s)^4\partial_s u_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}\partial_{sss}u_{1,0}\\
&-24\nu_{inv}^0(s)^3\nu_0^{inv}{}'(s)\partial_s u_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}{}^2-10\nu_{inv}^0(s)^2\nu_0^{inv}{}'(s)\nu_0^{inv}{}''(s)\partial_s u_{1,0}{}^3\\
&-14\nu_{inv}^0(s)^3\nu_0^{inv}{}''(s)\partial_s u_{1,0}{}^2\partial_{ss}u_{1,0}+3/2\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)^3\partial_s u_{1,0}{}^2\partial_{ss}u_{1,0}\\
&-3\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)^2\partial_s u_{1,0}{}^2\partial_{ss}u_{1,0}-16\nu_{inv}^0(s)^3\nu_0^{inv}{}'(s)\partial_s u_{1,0}{}^2\partial_{sss}u_{1,0}\\
&-30\nu_{inv}^0(s)^2\nu_0^{inv}{}'(s)^2\partial_s u_{1,0}{}^2\partial_{ss}u_{1,0}-4\nu_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_{sss}u_{1,0}\\
&-3\nu_{inv}^0(s)\nu_0^{inv}{}''(s)\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2+10\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)\nu_0^{inv}{}'(s)\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{12}\\
&+2\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)\nu_0^{inv}{}'(s)\theta_{3,0}\partial_{ss}\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}/\alpha_{12}-2\nu_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_{ss}\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}\\
&+4\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)\nu_0^{inv}{}''(s)\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}/\alpha_{12}+4\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_{sss}u_{1,0}/\alpha_{12}\\
&+\alpha_{22}\nu_0^{inv}{}'''(s)\nu_{inv}^0(s)\partial_s u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{12}-8\nu_{inv}^0(s)^3\lambda^2\nu_0^{inv}{}'(s)\partial_s u_{1,0}{}^3/\alpha_{22}\\
&+3\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)^2N^0(s)\nu_0^{inv}{}'(s)\partial_s u_{1,0}{}^3-\nu_{inv}^0(s)^2\partial_{ssss}u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2-2\nu_{inv}^0(s)^2\partial_s\theta_{3,0}{}^2\partial_{ss}u_{1,0}\\
&-2\nu_0^{inv}{}'(s)^2\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2-2\nu_{inv}^0(s)^4\partial_s u_{1,0}{}^2\partial_{ssss}u_{1,0}+\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)^3N^0{}'(s)\partial_s u_{1,0}{}^3\\
&+3/2\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)^2\nu_0^{inv}{}'(s)\partial_s u_{1,0}{}^3-2\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)\nu_0^{inv}{}'(s)\partial_s u_{1,0}{}^3-4\nu_{inv}^0(s)\nu_0^{inv}{}'(s)^3\partial_s u_{1,0}{}^3\\
&-2\nu_0^{inv}{}'(s)^2\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}-2\nu_{inv}^0(s)\nu_0^{inv}{}'(s)\theta_{3,0}\partial_{ss}\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}\\
&-4\nu_{inv}^0(s)\nu_0^{inv}{}''(s)\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}+\lambda^2\nu_{inv}^0(s)^2\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{12}\\
&+2\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)^2\partial_s\theta_{3,0}{}^2\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{12}+\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)^2\partial_{ssss}u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{12}\\
&+2\alpha_{22}\nu_0^{inv}{}'(s)^2\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{12}-\lambda^2\nu_{inv}^0(s)^2\partial_{ss}u_{1,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{22}\\
&-10\nu_{inv}^0(s)\nu_0^{inv}{}'(s)\theta_{3,0}\partial_s\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}-6\nu_{inv}^0(s)^4\lambda^2\partial_s u_{1,0}{}^2\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{22}\\
&+3\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)^3N^0(s)\partial_s u_{1,0}{}^2\partial_{ss}u_{1,0}-2\nu_{inv}^0(s)\nu_0^{inv}{}'(s)\partial_s\theta_{3,0}{}^2\partial_s u_{1,0}
\end{aligned}
\tag{ت-۴}
$$

$$
\begin{aligned}
RHS(O_{Eq\,6}^{(3)})=\;&2D_0D_1\theta_{3,1}/\alpha_{32}+2D_0D_2\theta_{3,0}/\alpha_{32}+D_1^2\theta_{3,0}/\alpha_{32}+\nu_{inv}^0(s)\lambda D_1\partial_s u_{1,1}/\alpha_{22}\\
&+\nu_{inv}^0(s)\lambda D_2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22}+\nu_{inv}^0(s)\lambda D_1\partial_s u_{1,1}/\alpha_{32}+\nu_{inv}^0(s)\lambda D_2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{32}\\
&-\nu_{inv}^0(s)\lambda D_1\partial_s u_{1,1}/\alpha_{12}-\nu_{inv}^0(s)\lambda D_2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{12}+2\nu_{inv}^0(s)\lambda\theta_{3,0}{}^2D_0\partial_s u_{1,0}/\alpha_{12}\\
&-2\nu_{inv}^0(s)\lambda\theta_{3,0}{}^2D_0\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22}+3/2\nu_{inv}^0(s)^3\lambda\partial_s u_{1,0}{}^2D_0\partial_s u_{1,0}/\alpha_{12}\\
&-3/2\nu_{inv}^0(s)^3\lambda\partial_s u_{1,0}{}^2D_0\partial_s u_{1,0}/\alpha_{32}-3/2\nu_{inv}^0(s)^3\lambda\partial_s u_{1,0}{}^2D_0\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22}\\
&-\nu_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}D_0\partial_s u_{1,0}{}^2/\alpha_{12}+\nu_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}D_0\partial_s u_{1,0}{}^2/\alpha_{22}+2/3\lambda^2\theta_{3,0}{}^3/\alpha_{22}\\
&+\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}{}^2/\alpha_{12}+\lambda^2\nu_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}{}^2/\alpha_{22}-\nu_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_{ss}u_{1,0}{}^2\\
&-\lambda^2\nu_{inv}^0(s)^2\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}{}^2/\alpha_{12}+2\alpha_{22}\nu_{inv}^0(s)\nu_0^{inv}{}'(s)\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}/\alpha_{12}\\
&-2/3\lambda^2\theta_{3,0}{}^3/\alpha_{12}-\nu_0^{inv}{}'(s)^2\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}{}^2-2\nu_{inv}^0(s)\nu_0^{inv}{}'(s)\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}\\
&+\alpha_{22}\nu_0^{inv}{}'(s)^2\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}{}^2/\alpha_{12}
\end{aligned}
\tag{ت-۵}
$$

$$
\begin{aligned}
RHS(O_{BC\,11}^{(3)})=\;&-2D_0D_2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22}-D_1^2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22}-2D_0D_1\partial_s u_{1,1}/\alpha_{22}+2\lambda D_2\theta_{3,0}/\alpha_{22}\\
&+2\lambda D_1\theta_{3,1}+1/2\theta_{3,0}{}^2D_0^2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22}+2\partial_s u_{1,0}D_0\partial_s u_{1,0}{}^2/\alpha_{22}/\alpha_{22}\\
&+2\theta_{3,0}D_0\theta_{3,0}D_0\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22}+\partial_s u_{1,0}{}^2D_0^2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22}-\lambda D_0\theta_{3,0}\partial_s u_{1,0}{}^2/\alpha_{22}\\
&-1/2\theta_{3,0}{}^2\partial_{sss}u_{1,0}-2\partial_s u_{1,0}\partial_{ss}u_{1,0}{}^2-\nu_0^{inv}{}''(s)\partial_s u_{1,0}{}^3-2\nu_0^{inv}{}'(s)^2\partial_s u_{1,0}{}^3\\
&-1/2\nu_0^{inv}{}''(s)\theta_{3,0}{}^2\partial_s u_{1,0}-\nu_0^{inv}{}'(s)\theta_{3,0}{}^2\partial_{ss}u_{1,0}-1/2\lambda^2\theta_{3,0}{}^2\partial_s u_{1,0}/\alpha_{22}\\
&-6\nu_0^{inv}{}'(s)\partial_s u_{1,0}{}^2\partial_{ss}u_{1,0}-\lambda^2\partial_s u_{1,0}{}^3/\alpha_{22}-\lambda D_0\theta_{3,0}\theta_{3,0}{}^2/\alpha_{22}-\partial_s u_{1,0}{}^2\partial_{sss}u_{1,0}
\end{aligned}
\tag{ت-۶}
$$

$$
RHS(O_{BC\,12}^{(3)})=1/2\theta_{3,0}{}^2\partial_{ss}u_{1,0}+\partial_s u_{1,0}{}^2\partial_{ss}u_{1,0}+1/2\nu_0^{inv}{}'(s)\theta_{3,0}{}^2\partial_s u_{1,0}+\nu_0^{inv}{}'(s)\partial_s u_{1,0}{}^3
\tag{ت-۷}
$$

پیوست ث- پارامترهای استفاده شده در ترم‌های سکولار

$$\delta_{k,k}=\int_0^1[\psi_{1,k}\psi_{1,k}+\psi_{6,k}\psi_{6,k}/\alpha_{32}]\mathrm{d}s,\ \xi_{111}=\int_0^1[\psi_{1,k}^2]\mathrm{d}s,\ \xi_{112}=\int_0^1[\psi_{1,k}\nu_{inv}^{0}(\nu_{inv}^{0}{}')(\psi_{1,k}{}')]\mathrm{d}s+\frac{1}{2}\left(\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^2(\psi_{1,k}{}'')]\mathrm{d}s\right)$$

$$\xi_{16}=\int_0^1[\psi_{1,k}(\nu_{inv}^{0}{}')\psi_{6,k}]\mathrm{d}s+\left(\int_0^1[\psi_{1,k}\nu_{inv}^{0}(\psi_{6,k}{}')]\mathrm{d}s\right),\ \xi_{61}=\int_0^1[\psi_{6,k}\nu_{inv}^{0}(\psi_{1,k}{}')]\mathrm{d}s,\quad \xi_{66}=\int_0^1[\psi_{6,k}^2]\mathrm{d}s$$

(ث-۱)

$$\chi_{1b1}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^2(\nu_{inv}^{0}{}')\psi_{6,k}(\psi_{1,k}{}')^2]\mathrm{d}s,\ \chi_{1d1}=\int_0^1[\psi_{1,k}(\nu_{inv}^{0}{}')\psi_{6,k}^3]\mathrm{d}s,\ \chi_{1d2}=\int_0^1[\psi_{1,k}\nu_{inv}^{0}\psi_{6,k}^2(\psi_{6,k}{}')]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1b2}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^3(\psi_{6,k}{}')(\psi_{1,k}{}')^2]\mathrm{d}s,\ \chi_{1c1}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^2(\psi_{1,k}{}'')\psi_{6,k}^2]\mathrm{d}s,\ \chi_{1a1}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^4(\psi_{1,k}{}')^2(\psi_{1,k}{}'')]\mathrm{d}s$$

$$\chi_{1a2}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^3(\psi_{1,k}{}'')(\psi_{1,k}{}')^2]\mathrm{d}s,\ \chi_{1c2}=\int_0^1[\psi_{1,k}\nu_{inv}^{0}(\nu_{inv}^{0}{}''')\psi_{6,k}^2(\psi_{1,k}{}')]\mathrm{d}s,\ \chi_{1c3}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^2(\psi_{1,k}{}'''')\psi_{6,k}^2]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1c4}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^2(\psi_{6,k}{}')^2(\psi_{1,k}{}'')]\mathrm{d}s,\ \chi_{1c5}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^2(\psi_{1,k}{}''')(\psi_{6,k}{}')\psi_{6,k}]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1a3}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^3(\nu_{inv}^{0}{}''')(\psi_{1,k}{}')^3]\mathrm{d}s,\ \chi_{1a4}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^3(\nu_{inv}^{0}{}')(\psi_{1,k}{}''')(\psi_{1,k}{}')^2]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1a5}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^4(\psi_{1,k}{}'''')(\psi_{1,k}{}')^2]\mathrm{d}s,\ \chi_{1b3}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^3\psi_{6,k}(\psi_{1,k}{}')(\psi_{1,k}{}'')]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1a6}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^4(\psi_{1,k}{}')(\psi_{1,k}{}'')(\psi_{1,k}{}''')]\mathrm{d}s,\ \chi_{1a7}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^2(\nu_{inv}^{0}{}')^2(\psi_{1,k}{}')^2(\psi_{1,k}{}'')]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1c6}=\int_0^1[\psi_{1,k}\nu_{inv}^{0}(\nu_{inv}^{0}{}')(\psi_{6,k}{}'')\psi_{6,k}(\psi_{1,k}{}')]\mathrm{d}s,\ \chi_{1c7}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^2(\psi_{6,k}{}'')\psi_{6,k}(\psi_{1,k}{}'')]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1c8}=\int_0^1[\psi_{1,k}\nu_{inv}^{0}(\nu_{inv}^{0}{}')(\psi_{6,k}{}')\psi_{6,k}(\psi_{1,k}{}'')]\mathrm{d}s,\ \chi_{1a8}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^3(\nu_{inv}^{0}{}')(\psi_{1,k}{}')(\psi_{1,k}{}'')^2]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1a9}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^3(\nu_{inv}^{0}{}')(\psi_{1,k}{}')(\psi_{1,k}{}'')^2]\mathrm{d}s,\ \chi_{1c9}=\int_0^1[\psi_{1,k}\nu_{inv}^{0}(\nu_{inv}^{0}{}'')(\psi_{6,k}{}')\psi_{6,k}(\psi_{1,k}{}')]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1a10}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^3N_0(\psi_{1,k}{}')^2(\psi_{1,k}{}'')]\mathrm{d}s,\ \chi_{1a11}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^2(\psi_{1,k}{}')^2(\psi_{1,k}{}'')]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1a12}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^2(\nu_{inv}^{0}{}')(\nu_{inv}^{0}{}'')(\psi_{1,k}{}')^3]\mathrm{d}s,\ \chi_{1a13}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^3(\nu_{inv}^{0}{}'')(\psi_{1,k}{}')^2(\psi_{1,k}{}'')]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1c10}=\int_0^1[\psi_{1,k}(\nu_{inv}^{0}{}')^2\psi_{6,k}^2(\psi_{1,k}{}'')]\mathrm{d}s,\ \chi_{1c11}=\int_0^1[\psi_{1,k}(\nu_{inv}^{0}{}')(\nu_{inv}^{0}{}'')\psi_{6,k}^2(\psi_{1,k}{}')]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1c12}=\int_0^1[\psi_{1,k}\nu_{inv}^{0}(\nu_{inv}^{0}{}')(\psi_{1,k}{}''')\psi_{6,k}^2]\mathrm{d}s,\ \chi_{1c13}=\int_0^1[\psi_{1,k}\nu_{inv}^{0}(\nu_{inv}^{0}{}'')\psi_{6,k}^2(\psi_{1,k}{}'')]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1a14}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^4(\psi_{1,k}{}'')^3]\mathrm{d}s,\ \chi_{1c14}=\int_0^1[\psi_{1,k}\nu_{inv}^{0}(\nu_{inv}^{0}{}')(\psi_{6,k}{}')^2(\psi_{1,k}{}')]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1a15}=\int_0^1[\psi_{1,k}\nu_{inv}^{0}(\nu_{inv}^{0}{}')^3(\psi_{1,k}{}')^3]\mathrm{d}s,\ \chi_{1c15}=\int_0^1[\psi_{1,k}(\nu_{inv}^{0}{}')^2(\psi_{6,k}{}')\psi_{6,k}(\psi_{1,k}{}')]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1a16}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^2(\nu_{inv}^{0}{}')N_0(\psi_{1,k}{}')^3]\mathrm{d}s,\ \chi_{1a17}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^2(\nu_{inv}^{0}{}')(\psi_{1,k}{}')^3]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1a18}=\int_0^1[\psi_{1,k}\nu_{inv}^{0}(\nu_{inv}^{0}{}')(\psi_{1,k}{}')^3]\mathrm{d}s,\ \chi_{1a19}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^3(N_0{}')(\psi_{1,k}{}')^3]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1a20}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^3(\nu_{inv}^{0}{}')(\psi_{1,k}{}')^3]\mathrm{d}s,\ \chi_{1c16}=\int_0^1[\psi_{1,k}\nu_{inv}^{0}(\nu_{inv}^{0}{}')\psi_{6,k}^2(\psi_{1,k}{}')]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{1c17}=\int_0^1[\psi_{1,k}{\nu_{inv}^{0}}^2(\psi_{6,k}{}')\psi_{6,k}(\psi_{1,k}{}')]\mathrm{d}s$$

(ث-۲)

$$\chi_{6a1}=\int_0^1[\psi_{6,k}{\nu_{inv}^{0}}^3(\psi_{1,k}{}')^3]\mathrm{d}s,\ \chi_{6c1}=\int_0^1[\psi_{6,k}^3\nu_{inv}^{0}(\psi_{1,k}{}')]\mathrm{d}s,\ \chi_{6d1}=\int_0^1[\psi_{6,k}^4]\mathrm{d}s,\ \chi_{6b1}=\int_0^1[\psi_{6,k}^2{\nu_{inv}^{0}}^2(\psi_{1,k}{}')^2]\mathrm{d}s,$$

$$\chi_{6b2}=\int_0^1[\psi_{6,k}^2{\nu_{inv}^{0}}^2(\psi_{1,k}{}'')^2]\mathrm{d}s,\ \chi_{6b3}=\int_0^1[\psi_{6,k}^2(\nu_{inv}^{0}{}')\nu_{inv}^{0}(\psi_{1,k}{}')(\psi_{1,k}{}'')]\mathrm{d}s,\ \chi_{6b4}=\int_0^1[\psi_{6,k}^2(\nu_{inv}^{0}{}')^2(\psi_{1,k}{}')^2]\mathrm{d}s$$

(ث-۳)

پیوست ج- Γ ها و ضریب غیرخطی مؤثر برای مود kام

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{1,k,R} = -C_3/\alpha_{22} + \xi_{61}/\alpha_{32} + 2\xi_{16}/\alpha_{22} + \xi_{61}/\alpha_{22} - \xi_{61}/\alpha_{12} \\
&\Gamma_{1,k,i} = \xi_{111} - \frac{1}{2}C_4/\alpha_{22} + \xi_{66}/\alpha_{32} - 2\xi_{112}/\alpha_{22} \\
&\Gamma_{2,k,i} = -C_6/\alpha_{22} - \frac{3}{2}\chi_{6a1}/\alpha_{32} - \frac{3}{2}\chi_{6a1}/\alpha_{22} - 6\chi_{1b3}/\alpha_{22} - 2\chi_{1d1}/\alpha_{22} - 6\chi_{1d2}/\alpha_{22} - 9\chi_{1b1}/\alpha_{22} \\
&\quad - 2\chi_{6c1}/\alpha_{22} + 2\chi_{1d1}/\alpha_{12} + 6\chi_{1d2}/\alpha_{12} + 2\chi_{6c1}/\alpha_{12} - 3\chi_{1b2}/\alpha_{22} + \frac{3}{2}\chi_{6a1}/\alpha_{12} \\
&\Gamma_{2,k,R,\lambda} = -\frac{1}{2}(2C_{5,\lambda^2}\alpha_{12} + 36\alpha_{12}\chi_{1a1} + 48\alpha_{12}\chi_{1a20} + 6\alpha_{12}\chi_{1c1} + 12\alpha_{12}\chi_{1c16} + 12\alpha_{12}\chi_{1c17} + 4\alpha_{22}\chi_{6d1} \\
&\quad - 6\alpha_{12}\chi_{6b1} - 4\alpha_{12}\chi_{6d1} - 6\alpha_{22}\chi_{1c1} - 12\alpha_{22}\chi_{1c16} - 12\alpha_{22}\chi_{1c17} + 6\alpha_{22}\chi_{6b1})/(\alpha_{22}\alpha_{12}) \\
&\Gamma_{2,k,R,\omega} = -\frac{1}{2}(2\alpha_{12}\chi_{1c1} + 4\alpha_{12}\chi_{1c16} + 4\alpha_{12}\chi_{1c17} - 2\alpha_{12}\chi_{6b1} + 2C_{5,\omega_{1,k}^2}\alpha_{12} + 32\alpha_{12}\chi_{1a20} + 24\alpha_{12}\chi_{1a1} \\
&\quad - 4\alpha_{22}\chi_{1c16} - 4\alpha_{22}\chi_{1c17} + 2\alpha_{22}\chi_{6b1} - 2\alpha_{22}\chi_{1c1})/(\alpha_{22}\alpha_{12}) \\
&\Gamma_{2,k,R,C} = -\frac{1}{2}(12\chi_{1c14}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1c7}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\alpha_{22}^2\chi_{1a18}\alpha_{12} + 12\chi_{1c10}\alpha_{12}\alpha_{22} + 24\chi_{1c5}\alpha_{12}\alpha_{22} \\
&\quad + 6\chi_{1c3}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1c15}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1c4}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1a5}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1a3}\alpha_{12}\alpha_{22} + 48\chi_{1a6}\alpha_{12}\alpha_{22} \\
&\quad - 6\alpha_{22}^2\chi_{1a19}\alpha_{12} + 84\chi_{1a13}\alpha_{12}\alpha_{22} + 60\chi_{1a12}\alpha_{12}\alpha_{22} + 180\chi_{1a7}\alpha_{12}\alpha_{22} - 9\alpha_{22}^2\chi_{1a17}\alpha_{12} + 96\chi_{1a4}\alpha_{12}\alpha_{22} \\
&\quad + 24\chi_{1c9}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1a14}\alpha_{12}\alpha_{22} + 12\chi_{1c6}\alpha_{12}\alpha_{22} - 18\alpha_{22}^2\chi_{1a10}\alpha_{12} + 60\chi_{1c8}\alpha_{12}\alpha_{22} + 144\chi_{1a8}\alpha_{12}\alpha_{22} \\
&\quad + 6\chi_{1c11}\alpha_{12}\alpha_{22} + 6\chi_{1c2}\alpha_{12}\alpha_{22} + 24\chi_{1c12}\alpha_{12}\alpha_{22} + 18\alpha_{22}^2\chi_{1a11}\alpha_{12} + 18\chi_{1c13}\alpha_{12}\alpha_{22} + 24\chi_{1a15}\alpha_{12}\alpha_{22} \\
&\quad - 9\alpha_{22}^2\chi_{1a2}\alpha_{12} + 2C_{5,Cons}\alpha_{22}\alpha_{12} + 6\chi_{6b2}\alpha_{22}\alpha_{12} + 12\chi_{6b3}\alpha_{22}\alpha_{12} + 6\chi_{6b4}\alpha_{22}\alpha_{12} - 24\alpha_{22}^2\chi_{1c12} \\
&\quad - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c15} - 6\alpha_{22}^2\chi_{1c2} - 6\alpha_{22}^2\chi_{1c3} - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c4} - 24\alpha_{22}^2\chi_{1c5} - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c6} - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c7} \\
&\quad - 24\alpha_{22}^2\chi_{1c9} - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c10} - 6\alpha_{22}^2\chi_{1c11} - 12\alpha_{22}^2\chi_{6b3} - 6\alpha_{22}^2\chi_{6b4} - 18\alpha_{22}^2\chi_{1a16}\alpha_{12} \\
&\quad - 12\alpha_{22}^2\chi_{1c14} - 18\alpha_{22}^2\chi_{1c13} - 60\alpha_{22}^2\chi_{1c8} - 6\alpha_{22}^2\chi_{6b2})/(\alpha_{22}\alpha_{12}) \\
&\Gamma_{2,k,R} = \lambda^2\Gamma_{2,k,R,\lambda} + \Gamma_{2,k,R,\omega}\omega_{1,k}^2 + \Gamma_{2,k,R,C}
\end{aligned}
$$

(ج-۱)

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{1,k,i} = -\omega_{1,k}(\lambda^2\Gamma_{1,k,R}\Gamma_{2,k,i} - 2\Gamma_{1,k,i}\Gamma_{2,k,R})/(\lambda^2\Gamma_{1,k,R}^2 + 4\Gamma_{1,k,i}^2\omega_{1,k}^2) \\
&\gamma_{1,k,R} = -\lambda(2\Gamma_{1,k,i}\Gamma_{2,k,i}\omega_{1,k}^2 + \Gamma_{1,k,R}\Gamma_{2,k,R})/(\lambda^2\Gamma_{1,k,R}^2 + 4\Gamma_{1,k,i}^2\omega_{1,k}^2)
\end{aligned}
$$

(ج-۲)

پیوست چ- پارامترهای استفاده شده در معادلات مدولاسیون

$$
\begin{aligned}
&C_3 = 2\psi_{6,k}|_{s=1}\psi_{1,k}|_{s=1}, C_4 = -2(\psi_{1,k}'|_{s=1})\psi_{1,k}|_{s=1} \\
&C_{5,Cons} = -6\psi_{1,k}|_{s=1}(v_{inv}^{0}{}'|_{s=1})^2(\psi_{1,k}'|_{s=1})^3 - 3\psi_{1,k}|_{s=1}(\psi_{1,k}''|_{s=1})\psi_{6,k}|_{s=1}^2(v_{inv}^{0}{}'|_{s=1}) \\
&\quad - 6\psi_{1,k}|_{s=1}(\psi_{1,k}''|_{s=1})^2(\psi_{1,k}'|_{s=1}) + \frac{3}{2}\psi_{6,k}|_{s=1}^2(v_{inv}^{0}{}'|_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^2 \\
&\quad - \frac{3}{2}\psi_{1,k}|_{s=1}\psi_{6,k}|_{s=1}^2\psi_{6,k}|_{s=1}^2 v_{inv}^{0}{}''|_{s=1}\psi_{1,k}'|_{s=1} + 3(\psi_{1,k}''|_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^3 \\
&\quad - \frac{3}{2}\psi_{1,k}|_{s=1}\psi_{6,k}|_{s=1}^2(\psi_{1,k}'''|_{s=1}) - 3\psi_{1,k}|_{s=1}(\psi_{1,k}'''|_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^2 \\
&\quad - 3\psi_{1,k}|_{s=1}(v_{inv}^{0}{}''|_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^3 + \frac{3}{2}(\psi_{1,k}'|_{s=1})(\psi_{1,k}''|_{s=1})\psi_{6,k}|_{s=1}^2 \\
&\quad - 18\psi_{1,k}|_{s=1}(\psi_{1,k}''|_{s=1})(v_{inv}^{0}{}'|_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^2 + 3(v_{inv}^{0}{}'|_{s=1})(\psi_{1,k}'|_{s=1})^4 \\
&C_{5,\omega_{1,k}^2} = \frac{1}{2}\psi_{1,k}'|_{s=1}(\psi_{6,k}|_{s=1}^2 - 2\psi_{1,k}'|_{s=1}{}^2)\psi_{1,k}|_{s=1}, \\
&C_{5,\lambda^2} = -\frac{3}{2}\psi_{1,k}'|_{s=1}(\psi_{6,k}|_{s=1}^2 + 2\psi_{1,k}'|_{s=1}{}^2)\psi_{1,k}|_{s=1} \\
&C_6 = -\psi_{6,k}|_{s=1}(\psi_{6,k}|_{s=1}^2 + (\psi_{1,k}'|_{s=1})^2)\psi_{1,k}|_{s=1}
\end{aligned}
$$

(چ-۱)

Nonlinear flapping-torsional free vibration analysis of rotating beams considering the Coriolis force

Hadi Arvin

Faculty of Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran

Abstract

The nonlinear free flapping-torsional vibration of rotating beams is investigated in this paper. The presented equations are based on the exact geometrical formulation in conjunction with the Cosserat theory for rods. The equations of motion are reduced to the flapping and torsional equations of motion for symmetric rectangular beams by neglecting the shear deformation. The governing equations are coupled to each other with the non-homogenous boundary conditions. By employing the direct method of multiple scales the effective nonlinearity coefficients of nonlinear natural frequencies are extracted. After validation of the current results, the effects of the rotating speed on the type and the value of the effective nonlinearity coefficient of natural frequencies are examined. The sign of the effective nonlinearity coefficient demonstrates the softening or hardening treatment of the corresponding nonlinear natural frequencies. It is concluded that ignoring the flapping-torsional coupling due to the Coriolis force, for odd modes makes some errors in the magnitude of effective nonlinearity but the type of nonlinearity is predicted correctly. On the other hand, in the even modes for average to high rotation speed in addition to incorrect estimation of the magnitude of effective nonlinearity the different type of nonlinearity is also predicted.

Keyword: Rotating beams, exact geometrical formulation, Coriolis force, effective nonlinearity coefficient, method of multiple scales.